Champs et Equation de Bilan - 2010

1h - Aucun document autorisé – Calculatrice interdite

Exercice 1 : Application directe du cours (15')

Dans chacun des cas suivants, indiquer quelle est **la** réponse correcte en justifiant votre réponse.

1) Soit le champ vectoriel $\vec{A}(x,y,z,t) = xy\vec{i} + y^2 t\vec{j} + \frac{1}{z}\vec{k}$ donné en coordonnées cartésiennes, la variable t représentant le temps.

a- Un nouveau champ vectoriel $\vec{B}(x,y,z,t)$ peut être construit à partir de $\overrightarrow{grad}(\vec{A})$ et :

$$\vec{B} = \overrightarrow{grad}(\vec{A}) = y\vec{i} + 2yt\vec{j} - \frac{1}{z^2}\vec{k}$$

b - Un nouveau champ scalaire ne peut pas être construit à partir de $div(\vec{A})$

c - $div(\vec{A})$ permet de construire un nouveau champ scalaire qui est permanent

d - $\overrightarrow{rot}(\vec{A})$ permet de construire un nouveau champ vectoriel qui est permanent

2) En tout point M(x,y,z) d'une salle de classe, la concentration en CO_2 est donnée par :

$$[CO_2](M) = 2xy + 3yz \text{ (SI)}$$

On se place en M_0 de coordonnées (1,1,1). En ce point, le taux de variation de la concentration en CO_2 en direction du point M_1 de coordonnées (2,3,3) vaut :

a- 18 (SI)

b - 6 (SI)

c - 34/3 (SI)

d - Aucune des propositions ci-dessus

3) En tout point M(x,y,z) d'une salle de classe, la concentration en CO_2 est donnée par :

$$[CO_2](M) = 2xy + 3yz \text{ (SI)}$$

Entre le point M_0 de coordonnées (1,1,1) et le point M_1 de coordonnées (2,3,3) l'écart de concentration en CO_2 vaut :

a- 18 (SI)

b - 34 (SI)

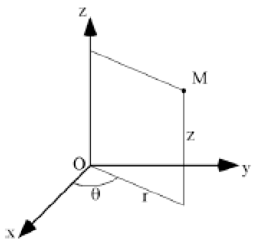
c - 54 (SI))

d - Aucune des propositions ci-dessus

Exercice 2 : Etude d'un champ (30')

On donne le champ vectoriel $\vec{V}$ ci-après en coordonnées cylindriques (r,θ,z).

$$\begin{cases} V_r = 0 \\ V_\theta = \frac{-\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r} \\ V_z = 0 \end{cases} \qquad \Gamma = \text{Cste} \in \mathbb{R}^{+*}$$



1) Le champ $\vec{V}$ est-il permanent, uniforme, plan, monodimensionnel ? Justifier les réponses.
2) Donner une représentation graphique de ce champ dans un plan parallèle au plan (O,x,y).
3) Donner intuitivement et sans calcul l'allure des lignes de courant dans tout plan parallèle au plan (O,x,y).
4) Calculer la divergence de $\vec{V}$. Que peut-on en conclure ?
5) Calculer le rotationnel de $\vec{V}$. Que peut-on en conclure ?
6) Justifier l'existence d'un champ Φ tel que $\vec{V} = \overrightarrow{grad}\ \Phi$. Donner l'équation des courbes isopotentielles de Φ. Discuter le résultat en comparant avec les lignes de courant de $\vec{V}$.
7) Bonus : retrouver par le calcul l'équation des lignes de courant données à la question 3).

On donne :

⊙ Expression du gradient en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial r}; \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}; \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

⊙ Expression de la divergence en coordonnées cylindriques : $div(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

⊙ Expression du rotationnel en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$

Exercice 3 : Equation de bilan (15')

A l'intérieur d'un réacteur (terme générique en génie des procédés qui désigne un volume au sein duquel a lieu une transformation), circule un fluide de masse volumique ρ constante contenant N espèces chimiques.
On note m_j la fraction massique de l'espèce chimique j du mélange :

$$m_j = \frac{X_j M_j}{\sum_{k=1}^{N} X_k M_k}$$

Où X_k et M_k sont respectivement la concentration molaire et la masse molaire de l'espèce k.

L'équation locale du bilan (on dit aussi équation de transport) de la fraction massique m_j s'écrit sous la forme suivante :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho m_j)}_{(1)} + \underbrace{\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i m_j)}_{(2)} + \underbrace{\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\rho D_j \frac{\partial m_j}{\partial x_i}\right)}_{(3)} - \underbrace{R_j}_{(4)} = 0$$

où x_i avec i = 1, 2, 3 désigne les trois coordonnées d'espace dans un repère cartésien.

Compte tenu de vos connaissances sur la structure générale, d'une équation de bilan et moyennant un peu de sens physique, on vous demande de :

1) Déterminer l'unité SI de R_j dans le terme (4).
2) Déterminer l'unité SI de U_i dans le terme (2). Que représente U_i ?
3) Préciser le sens physique des termes (1), (2), (3) et (4) de cette équation.