# Moyens de fabriquer un champ à partir d'un autre champ...

... à l'aide

d'opérateurs $\boxed{\text{locaux}}$

- Gradient : $\overrightarrow{\text{grad}}$
- Divergence : div
- Rotationnel : $\overrightarrow{\text{rot}}$

Qui interviennent dans les équations de bilan

<u>sous forme locale (ou différentielle)</u>

Définitions

Interprétations physiques

Propriétés

# Gradient

# Gradient

**Quels que soient :**

**- Les coordonnées,**
**- Le repère**

**On définit, le gradient <u>AU POINT M</u>**
**du CHAMP SCALAIRE f par :**

[redacted]

Aussi noté $\vec{\nabla} f$

**CHAMP VECTORIEL**

# Gradient

**Quels que soient :**

- **Les coordonnées,**
- **Le repère**

**On définit, le gradient <u>AU POINT M</u>**
**du CHAMP SCALAIRE f par :**

[redacted]

# Gradient

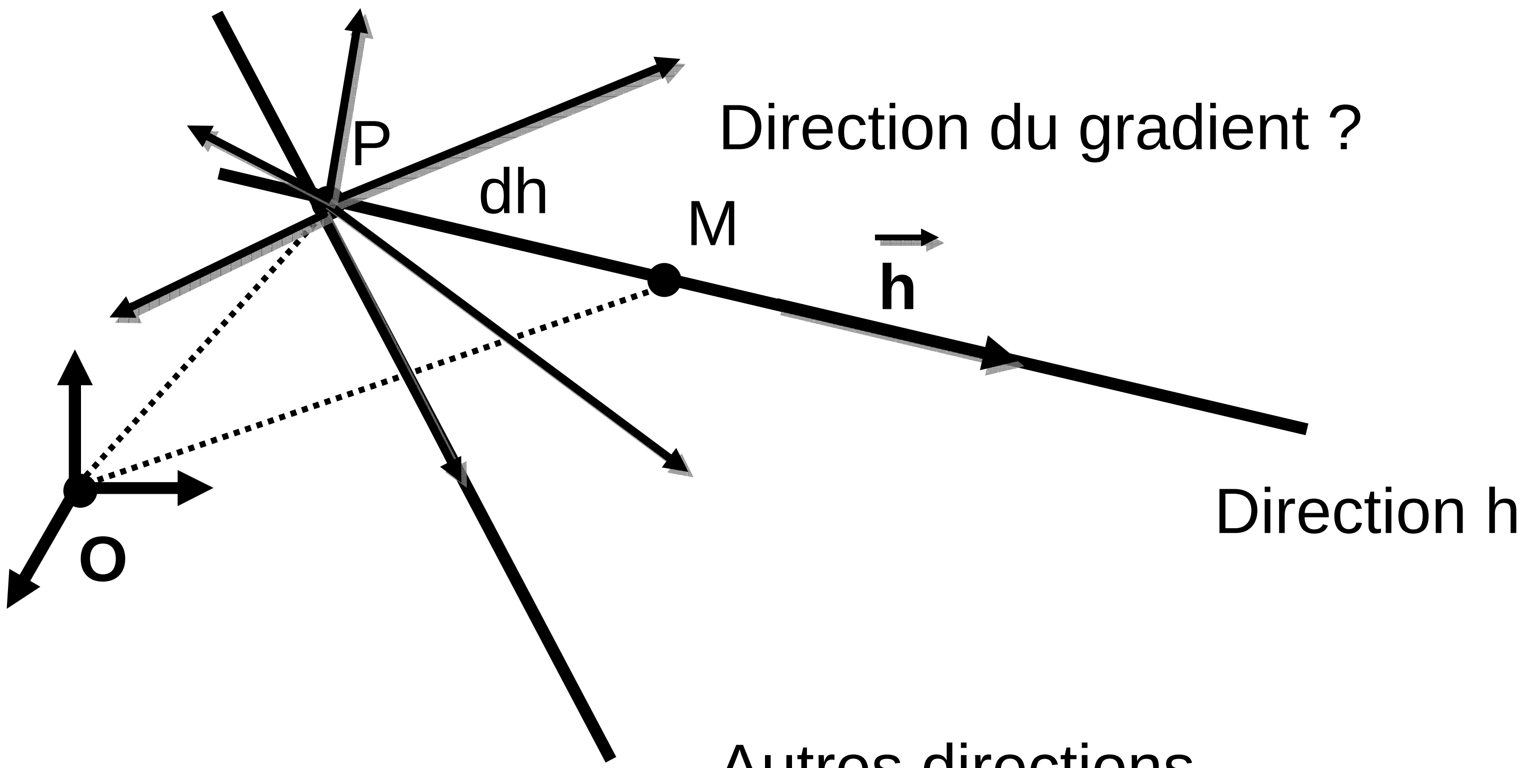
## Comment le calculer ?

Cartésiennes $$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(X)}{\partial X_i}\, \vec{e}_i \,.$$

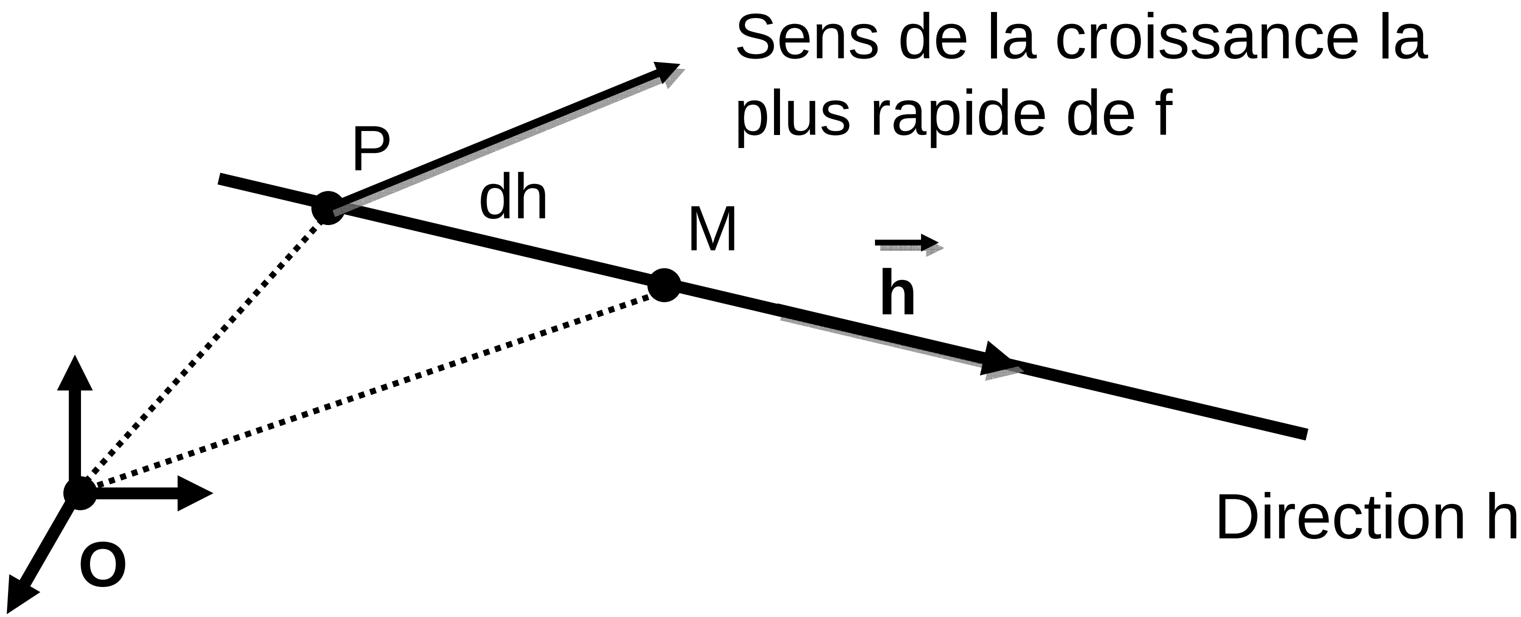
Cylindriques $$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(\rho,\varphi,z) = \frac{\partial f(\rho,\varphi,z)}{\partial \rho}\, \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f(\rho,\varphi,z)}{\partial \varphi}\, \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f(\rho,\varphi,z)}{\partial z}\, \vec{e}_z \,.$$

Sphériques $$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\, \vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\, \vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}\, \vec{e}_\varphi \,.$$

# Direction et sens du gradient

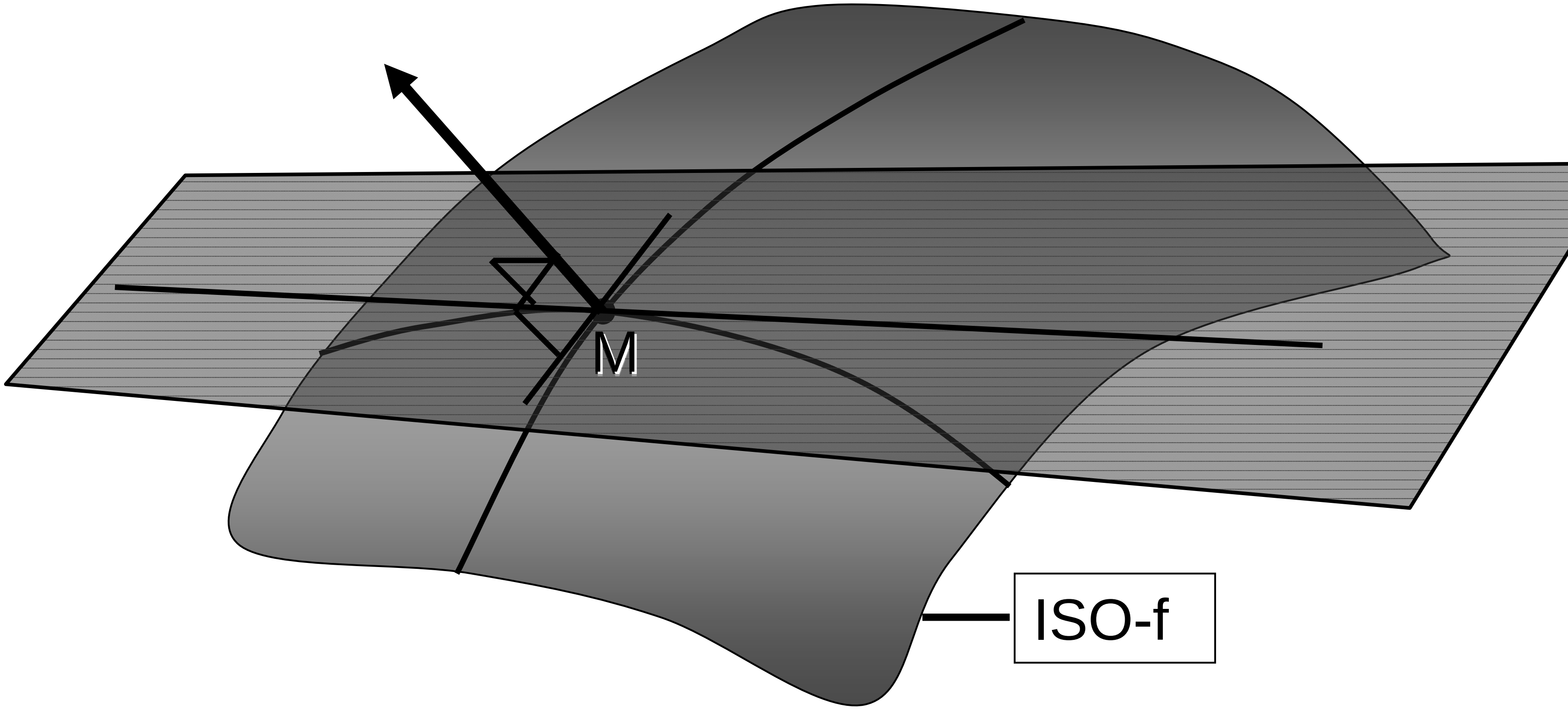


# Direction et sens du gradient




**Le gradient d'une fonction est dirigé suivant la direction de variation la plus RAPIDE de f, dans le sens des valeurs croissantes de f.**

# Direction et sens du gradient

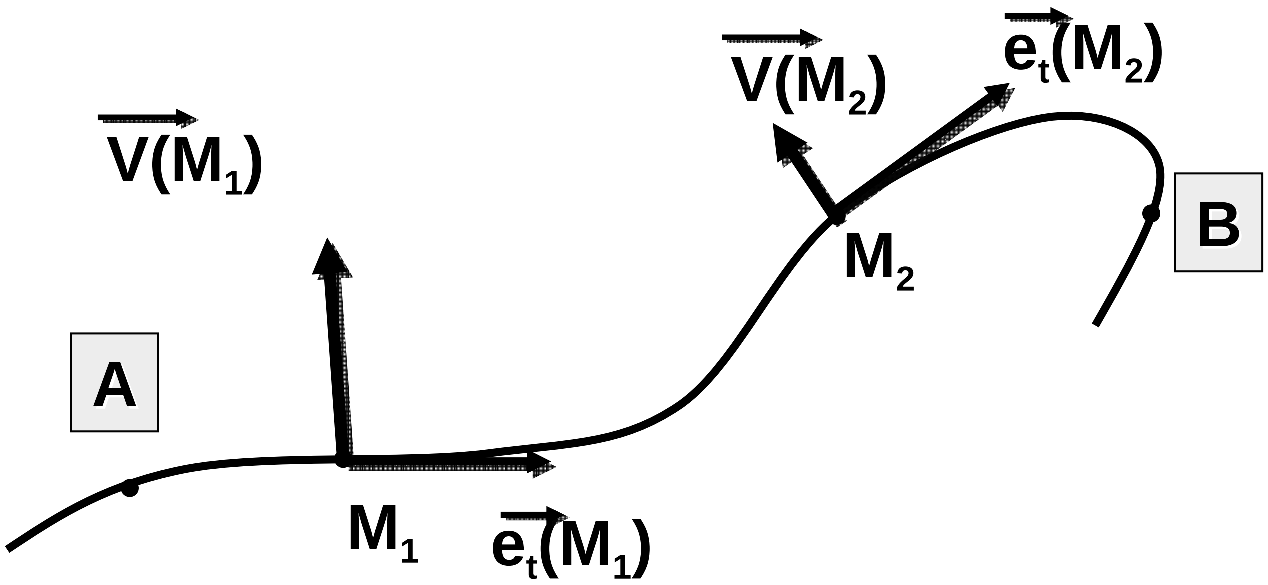



**Le gradient d'une fonction**
**est NORMAL aux iso-f**

# Circulation d'un champ de gradient

- Un champ scalaire  f(M)

→ $$\vec{V}(M) = \overrightarrow{grad}\, f(M)$$



# Circulation d'un champ de gradient

$$Circulation = \int \overrightarrow{grad}\, f(M) \cdot d\overrightarrow{OM}$$

$$Circulation = \int df$$

$$Circulation = f(B) - f(A)$$

**<u>Le résultat ne dépend pas du chemin suivi</u>**

# Circulation d'un champ de gradient

f(B) - f(A) = chute de potentiel

Le résultat ne dépend pas du chemin suivi

Caractéristique des champs conservatifs

# A retenir

**Il y a en fait <u>équivalence</u> entre :**

**- Le champ $\vec{V}$ est conservatif.**

**- Le champ $\vec{V}$ dérive d'un potentiel.**

**- Il existe un champ f tel que $\vec{V} = \overrightarrow{grad}\, f$.**

- **$\vec{V}(M).d(\overrightarrow{OM})$ est une différentielle exacte (qui vaut df).**

- **La circulation de $\vec{V}$ d'un point A à un point B ne dépend que de A et de B.**

- **La circulation de $\vec{V}$ sur TOUT contour fermé vaut 0.**

# Divergence et rotationnel

# Divergence et rotationnel

**- Un champ vectoriel** $\vec{V}(M)$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(M) \longrightarrow \textbf{DIVERGENCE}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{V}(M) \longrightarrow \textbf{ROTATIONNEL}$$

# La divergence

# Expressions de la divergence :

cartésiennes

$$\operatorname{div} \vec{f} : \frac{\partial f_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial f_z(x,y,z)}{\partial z} \,.$$

cylindriques

$$\operatorname{div} \vec{f} : \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\, f_\rho(\rho,\varphi,z)\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f_\varphi(\rho,\varphi,z)}{\partial \varphi} + \frac{\partial f_z(\rho,\varphi,z)}{\partial z} \,.$$

sphériques

$$\operatorname{div} \vec{f} : \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 f_r(r,\theta,\varphi)\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\, f_\theta(r,\theta,\varphi)\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f_\varphi(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi} \,.$$

Relation utile :

$$div\left(\lambda\vec{V}\right) = \lambda div(\vec{V}) + \overrightarrow{grad}(\lambda)\cdot\vec{V}$$

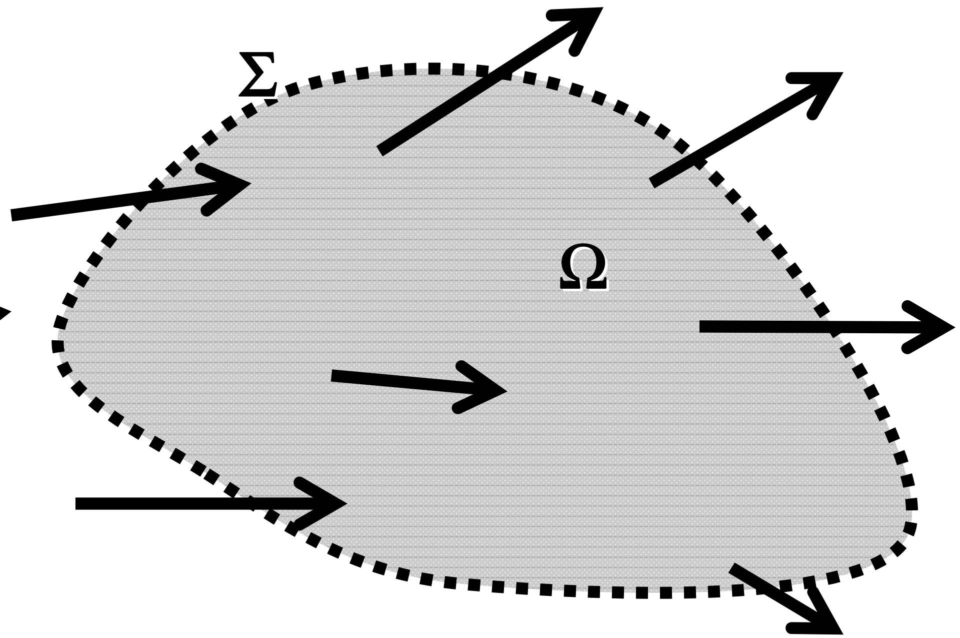
# Interprétation physique ?

<u>Formule de la divergence (Ostrogradsky) :</u>

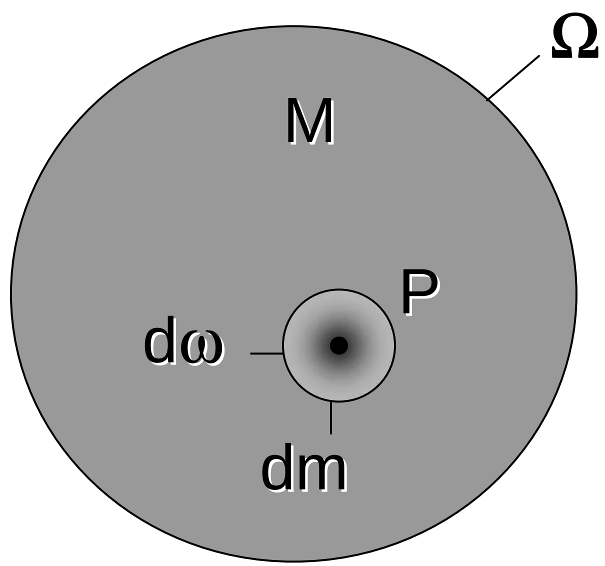
$$\boxed{\oiint_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}} = \iiint_{\Omega} div\,(\vec{V})\,d\omega$$

UN FLUX

$\Phi$



# Interprétation physique ?




**Masse volumique :**

$$\rho(\Omega)=\frac{M}{\Omega}$$

$$\rho(P)=\frac{dm}{d\omega}$$

**Généralisation à tout Ψ :** → Grandeur extensive

$$\rho_\Psi(P)=\lim_{\Omega\to 0\ en\ P}\frac{\Psi(\Omega)}{\Omega}$$

$$\Psi(\Omega)=\iiint_\Omega \rho_\Psi(P)\,d\omega$$

→ **Ressemble à l'intégrale de Green-Ostrogradsky**

# Interprétation physique !

**<u>Densité d'un scalaire</u>**

$$\rho_{\Psi}(M) = \lim_{\Omega \to 0 \ en\ M} \frac{\Psi(\Omega)}{\Omega}$$

**<u>Divergence</u>**

$$\boldsymbol{div\left(\vec{V}\right)_M = \lim_{\Omega \to 0\ en\ M} \frac{\Phi(\Sigma)}{\Omega}}$$

(Cette limite n'existe pas toujours)

**La divergence d'un champ vectoriel est au flux vectoriel ce que la densité est à un champ scalaire**

# Conséquence sur les équations de bilan

**Équations locales**

$$\cancel{\Psi} \longrightarrow \rho_{\Psi}$$

$$\cancel{\Phi} \longrightarrow \ ?$$

**Densité de flux**

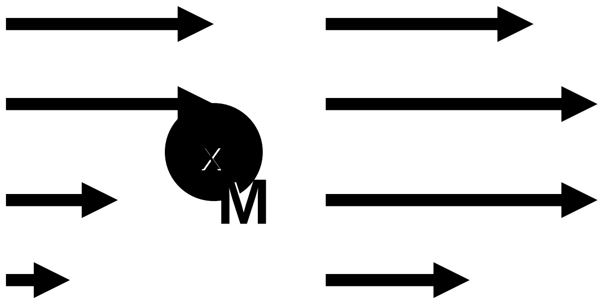
**<u>DIVERGENCE</u>**

**La divergence intervient chaque fois qu'on exprime la conservation d'une grandeur dans un milieu continu (cf. la suite du cours).**

# Illustrations possibles (EN LOCAL)

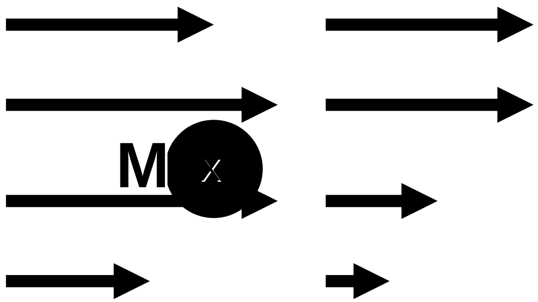
$$\boxed{div(\vec{A}) > 0}$$

**source**

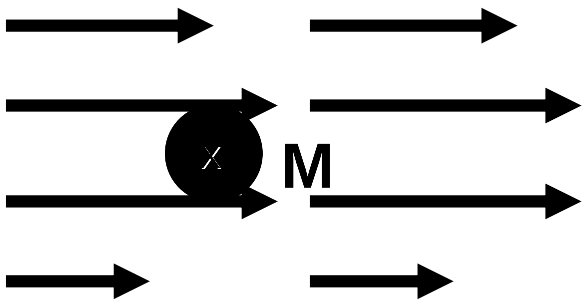



$$\boxed{div(\vec{A}) < 0}$$

**puits**




$$\boxed{div(\vec{A}) = 0}$$



# Le rotationnel

## Expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

cartésiennes

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z\,.$$

cylindriques

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial f_\rho}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\left(\frac{1}{\rho} + \frac{\partial}{\partial \rho}\right) f_\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial f_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z\,.$$

sphériques

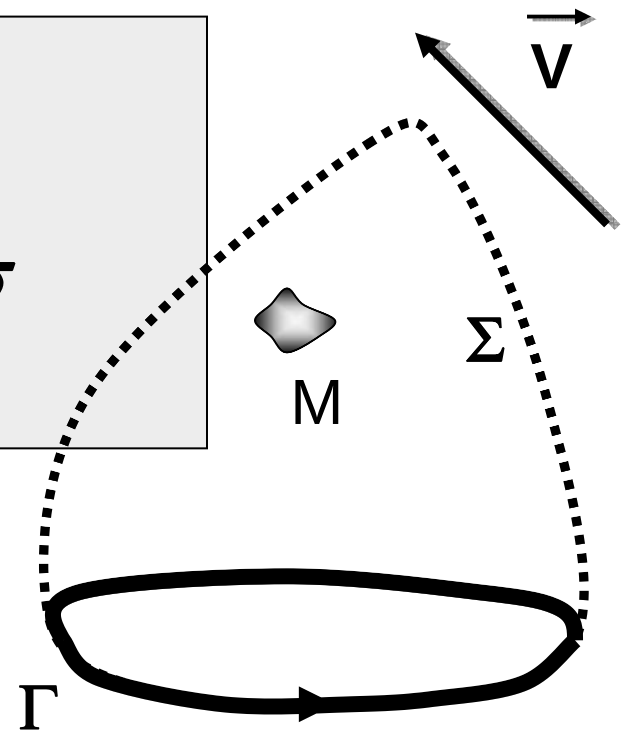
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta f_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial f_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r f_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \\ &\quad \left(\left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right) f_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi\,.\end{aligned}$$

# Relations utiles

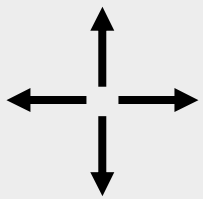
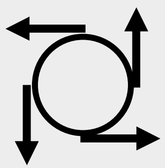
$$\overrightarrow{rot}\left(\lambda\vec{V}\right) = \lambda\overrightarrow{rot}(\vec{V}) + \overrightarrow{grad}(\lambda) \wedge \vec{V}$$

Formule du rotationnel (Stokes)

$$\Phi = \oint_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\overrightarrow{OM} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{rot}(\vec{V})d\sigma$$



# Justification de la terminologie

| *Champ* $\vec{V}$ | $div(\vec{V})$ | $\overrightarrow{rot}(\vec{V})$ |
|---|---|---|
| **Uniforme**  | **0** | $\vec{0}$ |
| **Divergent** $V_\rho = Cste$  | $\dfrac{V_\rho}{\rho} > 0$ | $\vec{0}$ |
| **Tournant** $V\varphi = Cste$  | **0** | $\dfrac{V\varphi}{\rho}\vec{e}_z$ |

# Champs à divergence nulle

# Champs à divergence nulle

**Si $\vec{V}$ est tel que $div(\vec{V})=0$ (en tout point),**

**dans ce cas, il existe un champ $\vec{\Psi}$ tel que :**

$$\boxed{\vec{V}=\overrightarrow{rot}(\vec{\Psi})}$$

**Potentiel vecteur**

$div(\overrightarrow{rot})=0$

# Champs 2D à divergence nulle (1/4)

Si V est un champ 2D, on peut montrer que : $\overrightarrow{\mathbf{V}} = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(\Psi) \wedge \overrightarrow{\mathbf{k}}$

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{Donc } \overrightarrow{\mathbf{V}} \perp \overrightarrow{\mathbf{grad}}(\Psi) \\ \\ \textbf{Et comme } \overrightarrow{\mathbf{grad}}(\Psi) \perp \textbf{iso-}\Psi\end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathbf{V}} \textbf{ // iso-}\Psi}$$

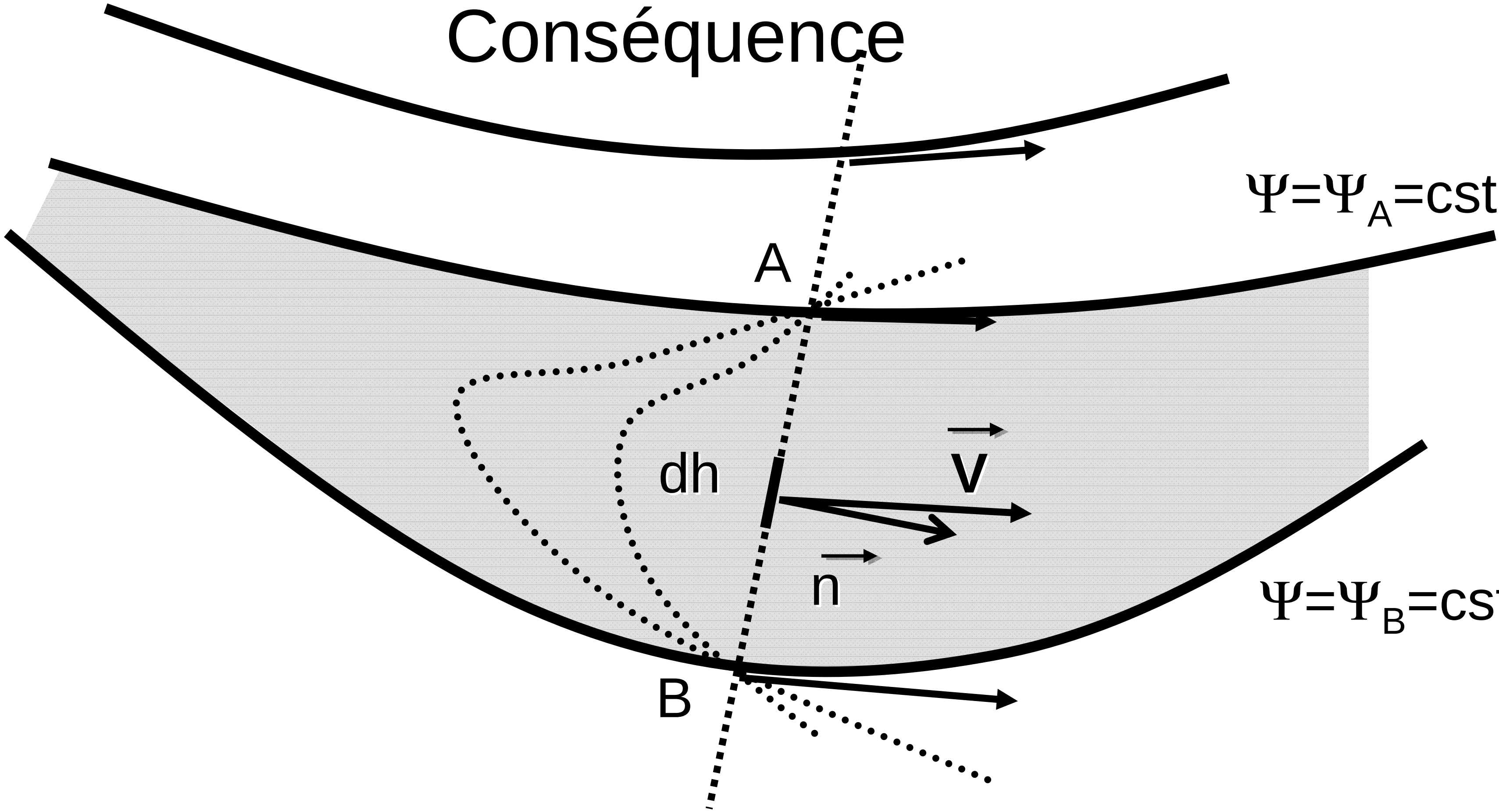
**Les lignes de courant/champ d'un champ à divergence nulle sont données par :**

$$\Psi = \mathbf{cste}$$

**$\Psi$ est appelée fonction de courant**

# Champs 2D à divergence nulle (2/4)

## Conséquence




$$\Phi = \int_A^B \vec{V} \cdot \vec{n}\, dh = \Psi_B - \Psi_A = \text{cste entre 2 LdC}$$

# Champs 2D à divergence nulle (3/4)

**Les champs à divergence nulle sont dits :**

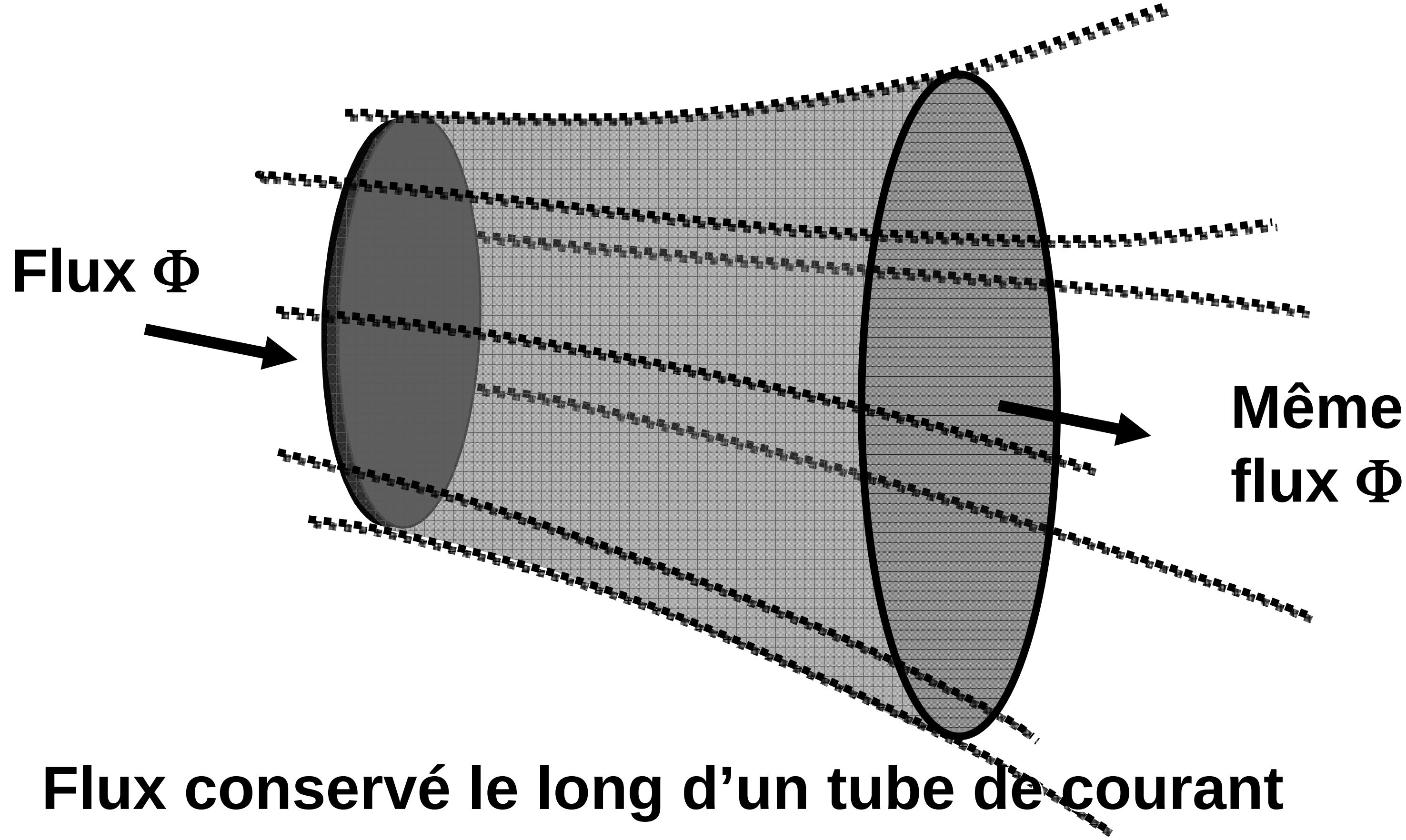
**Champs à flux conservatif**

# Champs 2D à divergence nulle (4/4)

| | | |
|---|---|---|
| **2D plan Cartésien** | $U = \partial \Psi / \partial y$ | $V = -\partial \Psi / \partial x$ |
| **2D plan Cylindrique** | $U_\rho = \frac{1}{\rho} \partial \Psi / \partial \varphi$ | $U_\varphi = -\partial \Psi / \partial \rho$ |
| **2D axisym. Cylindrique** | $U_\rho = \frac{1}{\rho} \partial \Psi / \partial z$ | $U_z = -\frac{1}{\rho} \partial \Psi / \partial \rho$ |

Exercice : vérifier que ces champs sont bien à divergence nulle

# Extension :
# champs 3D à divergence nulle




**Flux conservé le long d'un tube de courant**

**Flux net au travers de l'enveloppe d'un tube de courant = 0**

# Champs à divergence nulle

On montre en outre : $$\vec{\Omega} = \overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right) = -\Delta\Psi\vec{k}$$

→Pour un champ irrotationnel et à divergence nulle, la fonction de courant s'obtient en résolvant L'EQUATION de LAPLACE : $\Delta\Psi=0$

# Champs à rotationnel nul

ou, autrement dit

# Champs irrotationnels

# Champs à rotationnel nul (1/2)

**Si $\vec{V}$ est tel que $\overrightarrow{rot}(\vec{V})=\vec{0}$ (en tout point),**

**dans ce cas, il existe un champ $\Phi$ tel que :**

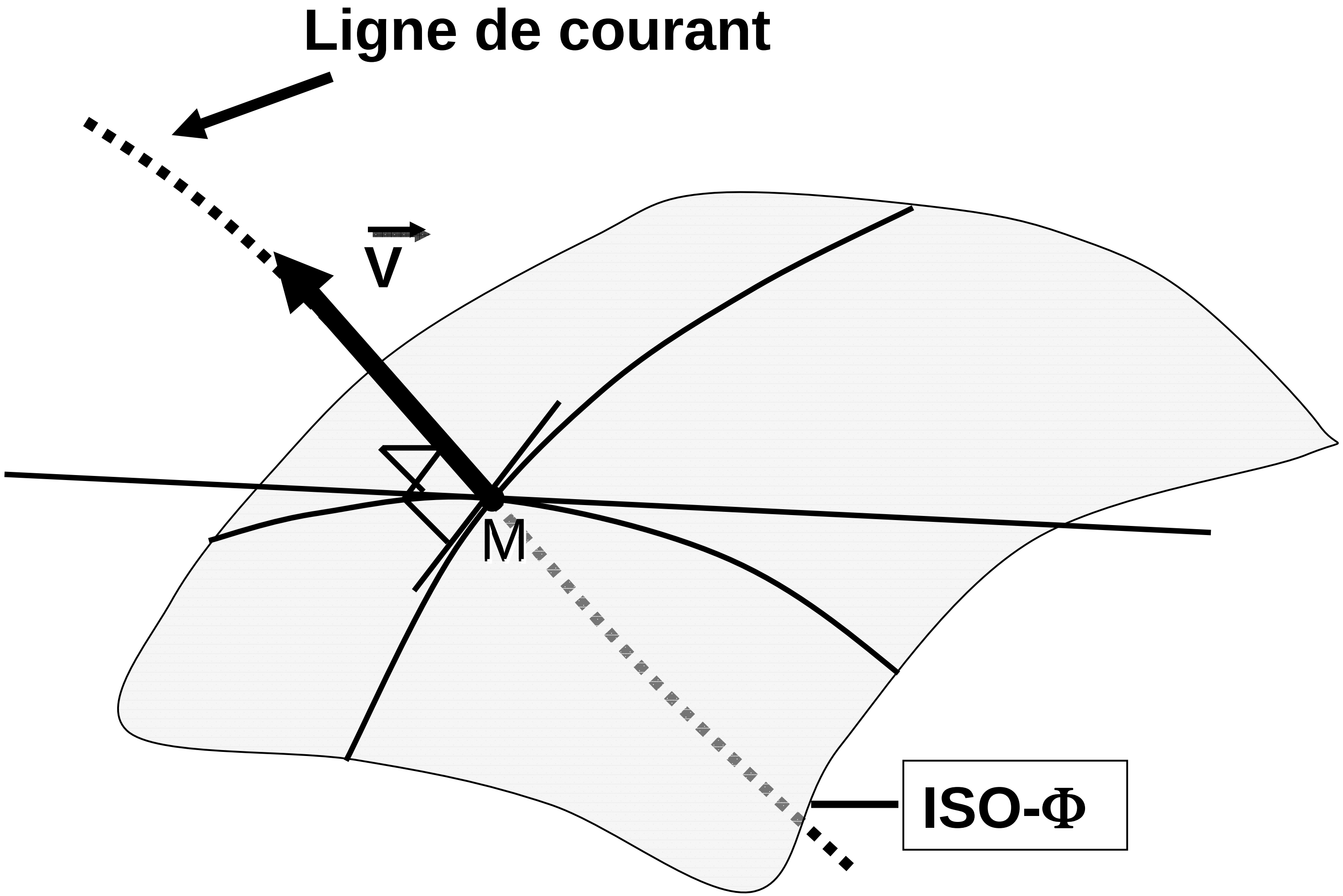
$$\boxed{\vec{V}=\overrightarrow{grad}(\Phi)}$$

**Fonction "potentiel"**

**Les champs à rotationnel nul sont donc :**
**des champs conservatifs**

$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad})=\vec{0}$

# Champs à rotationnel nul (2/2)



# Champs 2D, permanents tels que $\mathrm{div}(\vec{V})=0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V})=0$

$$\vec{V}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Phi)$$

$$\vec{V}=\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{\Psi})$$