EQUATIONS DE BILAN

On s'intéresse à …

… des <u>systèmes OUVERTS</u> qui peuvent échanger…

… de la matière avec leur extérieur.

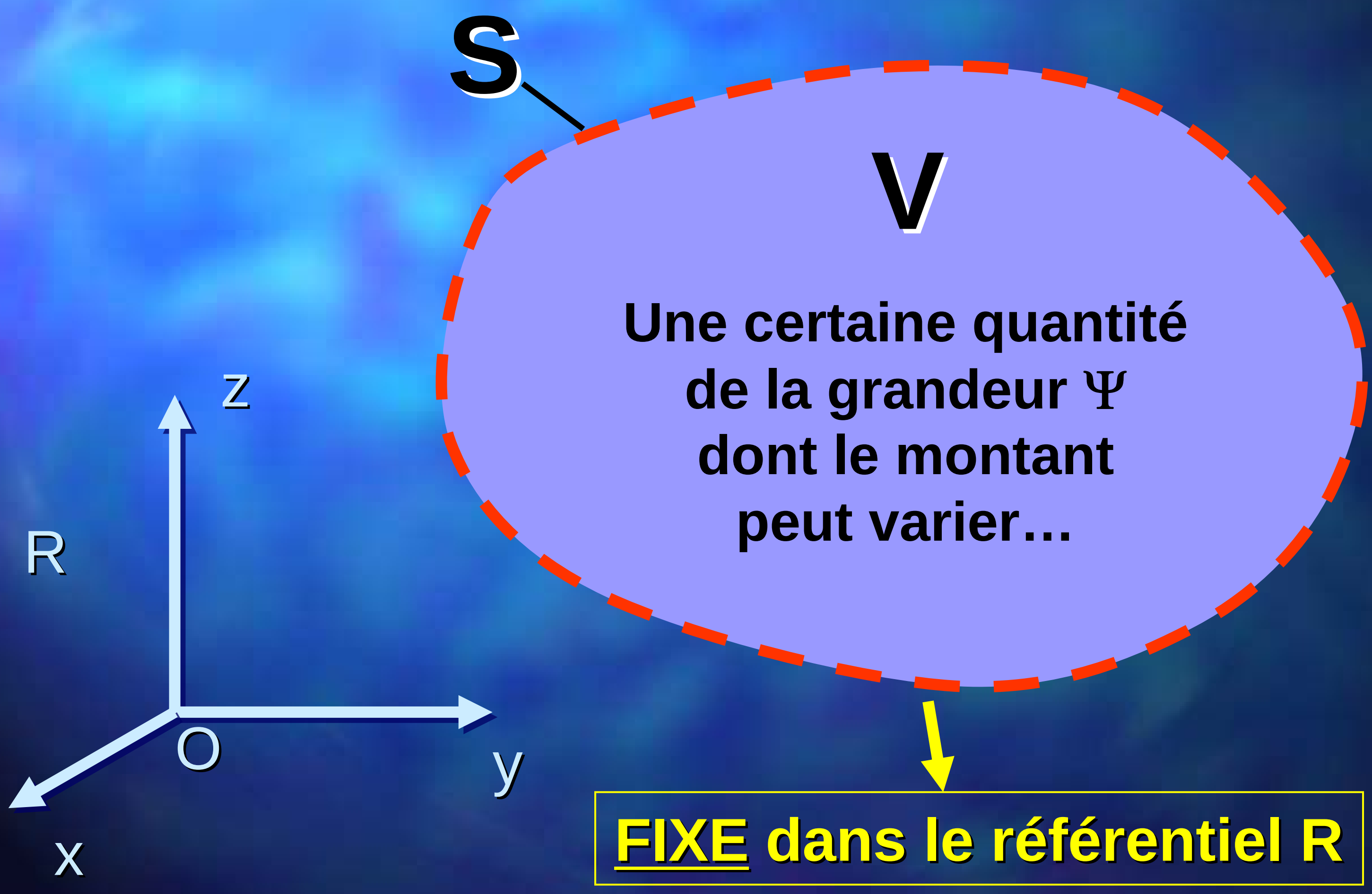
On va se servir de :

- **Volumes réels ou imaginaires dits <u>VOLUMES de CONTRÔLE</u>**

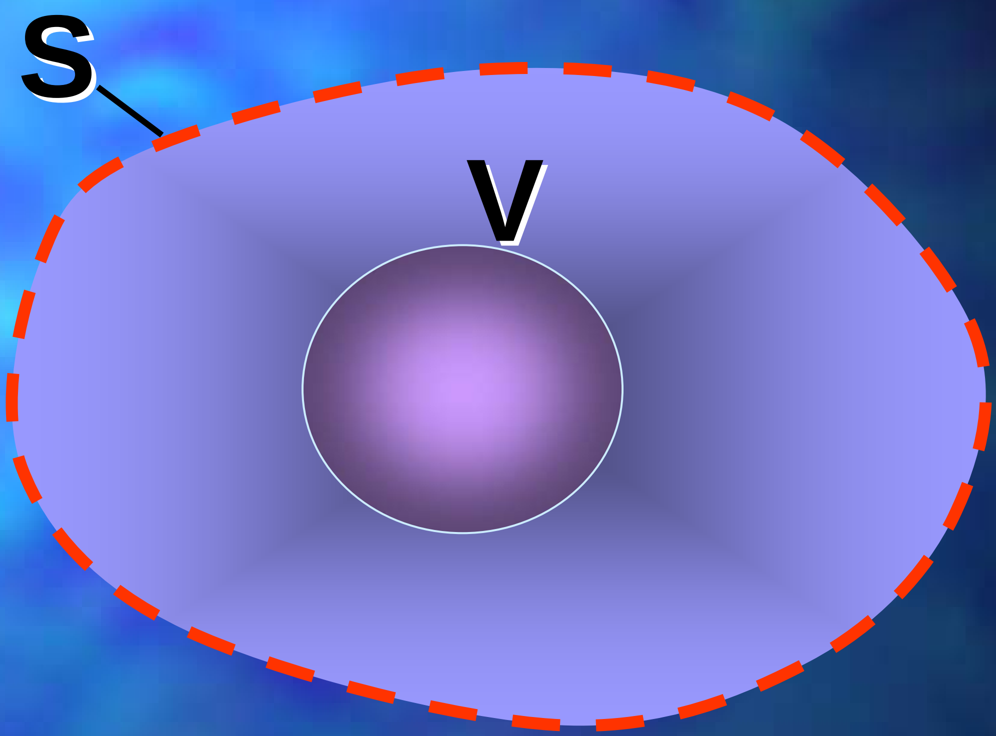
  Ces volumes seront <u>FIXES et INDEFORMABLES</u>

- **Limités par une surface fermée (au sens topologique du terme), mais "perméable" (<u>SURFACE DE CONTRÔLE</u>)**

Méthode générale d'analyse



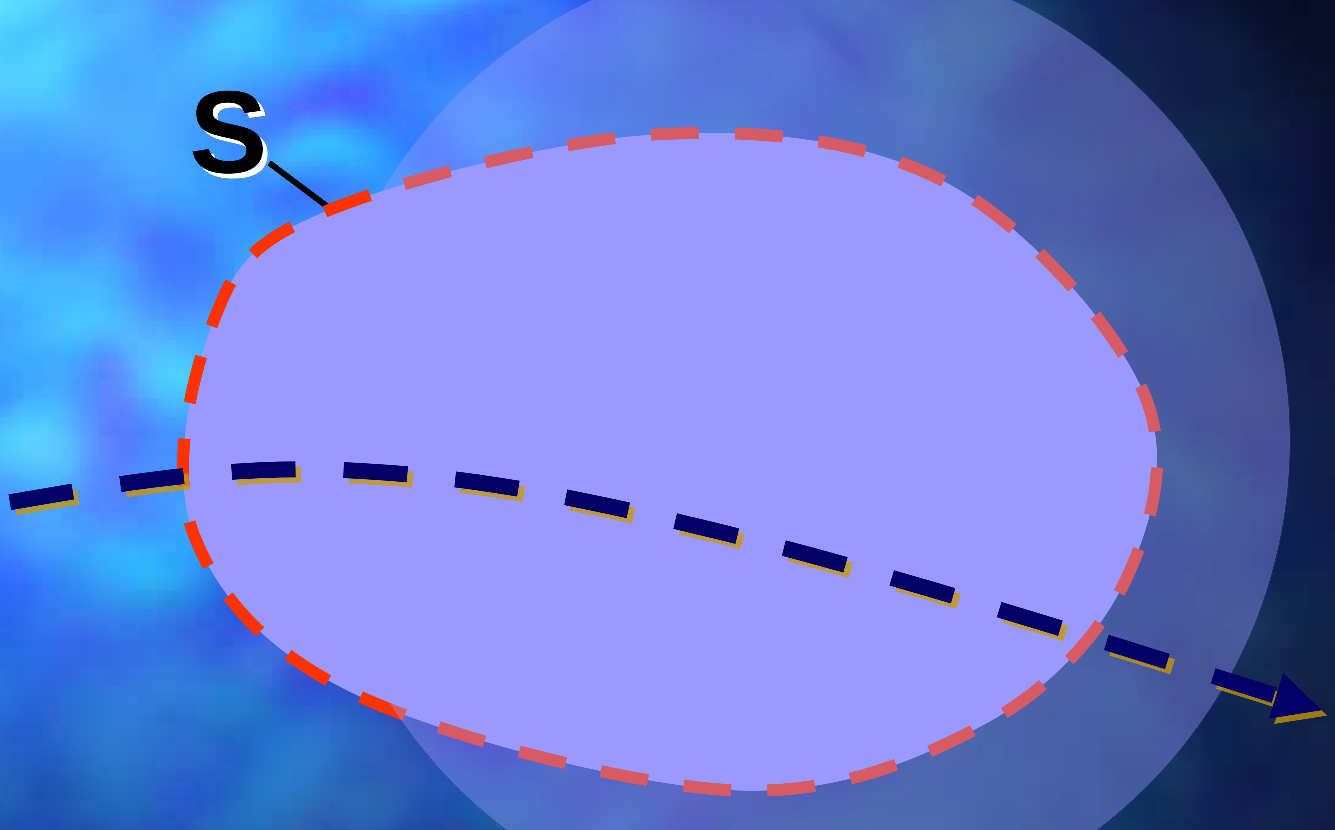
Les variations de Ψ sont dues :



1/ à la présence de sources / puits de Ψ

--> Création ou destruction "<u>interne</u>" de Ψ

Les variations de Ψ sont dues :



2/ à des transferts au travers de la frontière

--> Apport ou retrait via "flux" surfaciques

Expression générale du bilan de toute grandeur extensive

$$\begin{Bmatrix}\text{Taux de}\\ \text{variation}\\ \text{dans V}\end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{Bmatrix}\text{"Flux" net des}\\ \text{échanges}\\ \text{au travers}\\ \text{des frontières}\end{Bmatrix}}_{\text{Échanges avec l'extérieur de S}} + \underbrace{\begin{Bmatrix}\text{Taux de}\\ \text{création/destruction}\\ \text{interne}\end{Bmatrix}}_{\text{Variations de }\Psi\text{ dans V}}$$

Échanges avec l'extérieur de S

Variations de Ψ dans V

Modèles usuels

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Taux de}\\ \text{variation}\\ \text{dans V}\end{array}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_V \rho_\Psi \, dV\right)$$

Remarque : ici, $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t}$

Modèles usuels

Echange au travers des frontières

{Flux convectifs}

{Flux diffusifs}

Modèles usuels

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Flux NET}\\ \text{convectif}\end{array}\right\} = -\iint_S (\ldots)\vec{U}\cdot\vec{n}\,dS$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Flux NET}\\ \text{diffusif}\end{array}\right\} = -\left(\iint_S -\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\ldots)\cdot\vec{n}\,dS\right)$$

Schémas diffusionnels classiques

Potentiel	Résistance	Flux
Température T	$1/k$	$-k\,\overrightarrow{grad}(T)$
Concentration C	$1/D$	$-D\,\overrightarrow{grad}(C)$
Potentiel V	R	$-\frac{1}{R}\overrightarrow{grad}(V)$

Modèles usuels

Création / destruction / conversion

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Taux de}\\ \text{création interne}\end{array}\right\} = \iiint_V \dot{\sigma}_\Psi \, dV$$

Taux de création de Ψ par unité de volume et par unité de temps

Equation générale du bilan de toute grandeur extensive - FORME INTEGRALE -

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_V \rho_\Psi \, dV\right) = -\left(\iint_S (\rho_\Psi)\vec{U}\vec{n}dS + \iint_S -\alpha\,\overrightarrow{\text{grad}}(\ldots)\cdot\vec{n}dS\right) + \iiint_V \dot{\sigma}_\Psi dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_V \rho_\Psi \, dV\right) = -\left(\iint_S \vec{q}_\Psi\vec{n}dS\right) + \iiint_V \dot{\sigma}_\Psi dV$$

Exemple

Bilan de masse (en l'absence de source)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho \, dV\right) = -\int_S \rho \vec{U}\vec{n} dS$$

Remarque

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{V} (1)\, dV = -\iint\limits_{S} (2)\cdot \vec{n}\, dS + \iiint\limits_{V} (3)\, dV$$

(1)	(2)	(3)
Scalaire	Vecteur	Scalaire
Vecteur	Matrice	Vecteur

Equation générale du bilan de toute grandeur extensive - FORME DIFFERENTIELLE -

1. On part de la forme intégrale (V fixe)

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(1)\, dV = -\iint_S (2)\cdot\vec{n}\,dS + \iiint_V (3)\, dV$$

2. On utilise le théorème de la divergence (Green-Ostrogradsky)

$$\iint_S (2)\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_V \mathrm{div}(2)\, dV$$

Equation générale du bilan de toute grandeur extensive - FORME DIFFERENTIELLE -

3. …de sorte à n'obtenir qu'une seule intégrale de volume.

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(1) + \mathrm{div}(2) - (3) \right] dV = 0$$

4. Valable pour tout V et donc, à la limite, pour V tendant vers 0 (on tend alors vers la densité)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(1) + \mathrm{div}(2) - (3) = 0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\Psi) + \mathbf{div}\left[\rho_\Psi \vec{U}\right] - \mathbf{div}\left(\alpha\, \overrightarrow{\mathbf{grad}}(\ldots)\right) - \dot{\sigma}_\Psi = 0 \qquad (1)$$

scalaire

Equation (1) souvent mise sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\Psi) + \boxed{\mathbf{div}\left[\boxed{\vec{q}_\Psi}\right]} - \dot{\sigma}_\Psi = 0$$

Densité volumique de flux

Densité de courant ou densité surfacique de flux

Rem.: pour une quantité vectorielle, on peut travailler sur chacune des composantes

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Taux de}\\ \text{variation}\\ \text{dans V}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{"Flux" net des}\\ \text{échanges}\\ \text{au travers}\\ \text{des frontières}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{Taux de}\\ \text{création/destruction}\\ \text{interne}\end{array}\right\}$$

Equivalence locale :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\Psi) = -\mathbf{div}\left[\vec{q}_\Psi\right] + \dot{\sigma}_\Psi}$$

Exemple

<u>Bilan de masse (pas de source de masse)</u>

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\,\mathrm{div}(\rho \vec{U})$$

Remarques

→ L'approche locale conduit à la détermination des champs en présence après intégration…

→ Mais dans beaucoup d'applications, la résolution complète des équations de bilan local n'est pas réalisable…

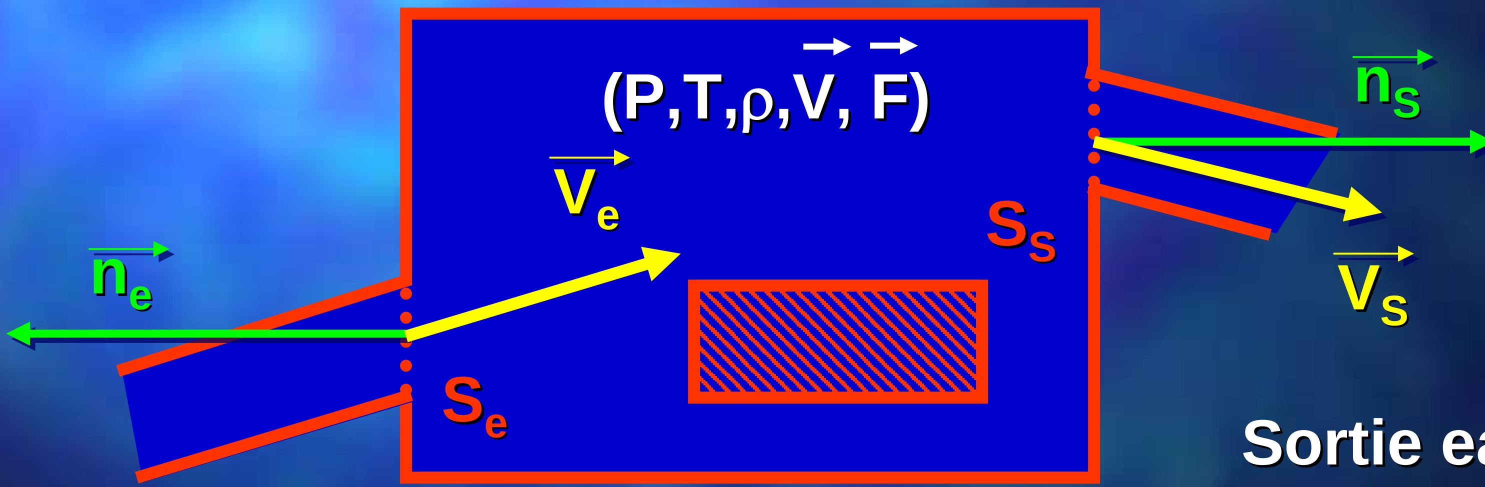
→ Approche macroscopique

→ Plus simple mais informations sur la valeur des différentes grandeurs aux entrées sorties uniquement (pas en chaque point du système)

Cas particulier : les échanges sont localisés autour de 2 points du Système

Exemple en Génie des Procédés

Réacteur nucléaire



Sortie eau réchauffée

Entrée eau refroidissement

- Le volume de contrôle est choisi FIXE,
- Le volume de contrôle est choisi indéformable
- Le régime est éventuellement permanent

- On part de l'équation locale de bilan

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\Psi)+\mathbf{div}\left[\vec{q}_\Psi\right]-\dot{\sigma}_\Psi=0}$$

- On intègre sur le volume de contrôle…

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho_\Psi)dV + \iiint_V \mathbf{div}[\vec{q}_\Psi]dV - \iiint_V \dot{\sigma}_\Psi dV = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho_\Psi dV + \iiint_V \mathbf{div}[\vec{q}_\Psi]dV - \iiint_V \dot{\sigma}_\Psi dV = 0$$

Théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho_\Psi dV + \iint_S \rho_\Psi \vec{V}\cdot\vec{n}dS - \iiint_V \dot{\sigma}_\Psi dV = 0$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_D \rho_\Psi \, dV\right)} = -\iint_S \rho_\Psi \, \vec{V}\cdot\vec{n}\,dS + \iiint_D \dot{\sigma}_\Psi \, dV$$

PERMANENT

$$\cancel{\frac{\partial \Psi}{\partial t}} = -\left(Q_\Psi\right)_E^S + S_\Psi$$

Soit, si S_E et S_S sont choisies perpendiculaires à l'écoulement (classique) :

$$\cancel{\frac{\partial \Psi}{\partial t}} = \left(\rho_{\Psi E} V_E S_E - \rho_{\Psi S} V_S S_S\right) + S_\Psi$$

→se généralise au cas d'une grandeur vectorielle

Exemples

- **Conservation de la masse (pas de source):**

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \rho_E V_E S_E - \rho_S V_S S_S$$

- **Bilan global de quantité de mouvement :**

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \rho_E V_E^2 S_E \vec{n}_E - \rho_S V_S^2 S_S \vec{n}_S + \sum \vec{F}_{ext} \quad (+\vec{F}_{inertie})$$

FIN