Moyens de fabriquer un champ à partir d'un autre champ...

... à l'aide d'opérateurs $\boxed{\text{locaux}}$

- Gradient : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$
- Divergence : div
- Rotationnel : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$

Qui interviennent dans les équations de bilan
<u>sous forme locale (ou différentielle)</u>

Définitions

Interprétations physiques

Propriétés

Gradient

Gradient

Quels que soient :

- Les coordonnées,
- Le repère

On définit, le gradient <u>AU POINT M</u> du CHAMP SCALAIRE f par :

$$df = \overrightarrow{grad}\, f \cdot \overrightarrow{dOM}$$

Aussi noté $\vec{\nabla} f$

CHAMP VECTORIEL

Gradient

Quels que soient :

- Les coordonnées,
- Le repère

On définit, le gradient <u>AU POINT M</u>
du CHAMP SCALAIRE f par :

$$df / dh = (\overrightarrow{grad\ f}).\ \overrightarrow{h} \quad \text{si} \quad \overrightarrow{dOM} = (dh)\ \overrightarrow{h}$$

Gradient

Comment le calculer ?

Cartésiennes

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(X)}{\partial X_i}\, \vec{e}_i\,.$$

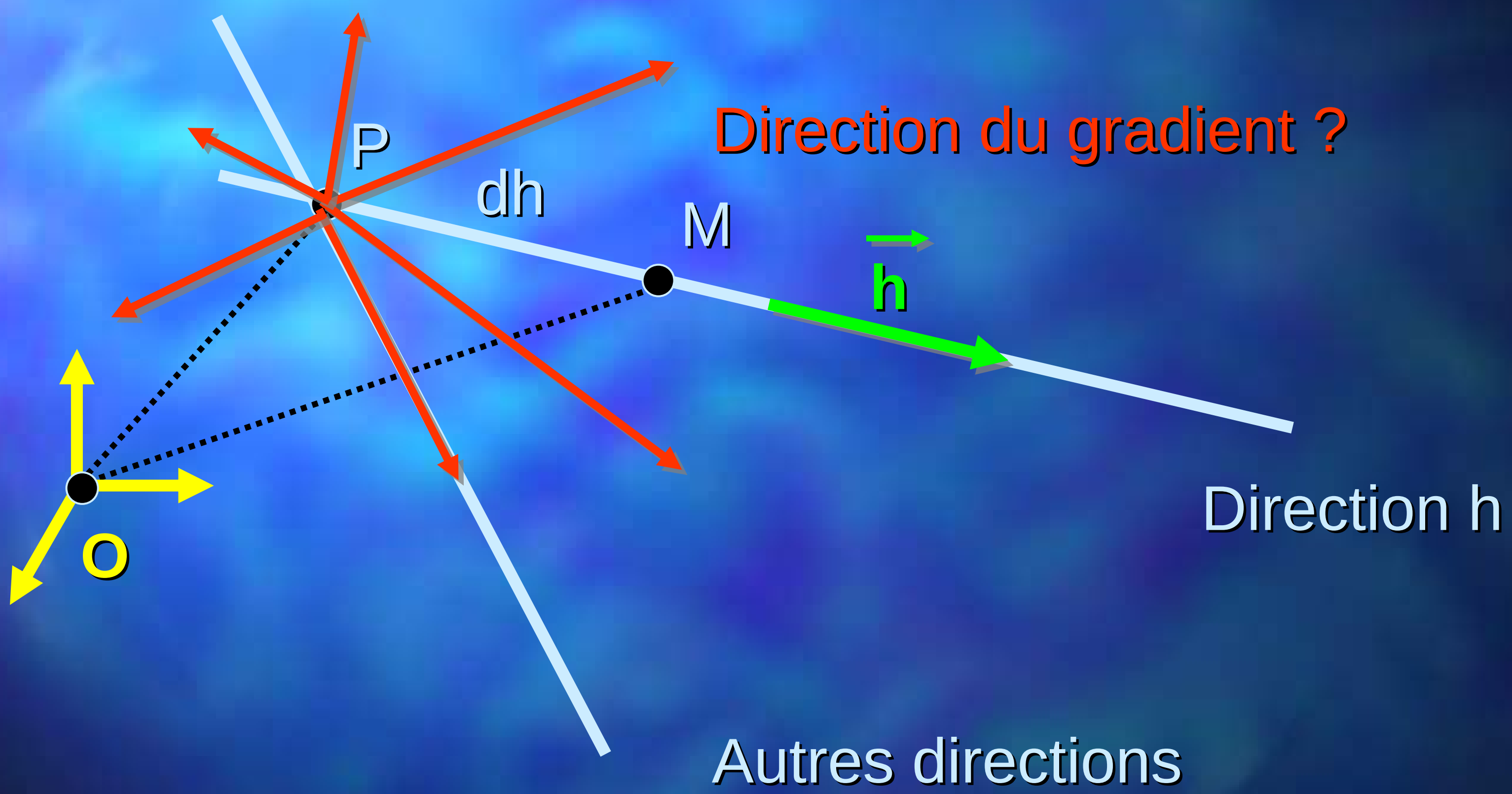
Cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(\rho,\varphi,z) = \frac{\partial f(\rho,\varphi,z)}{\partial \rho}\, \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f(\rho,\varphi,z)}{\partial \varphi}\, \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f(\rho,\varphi,z)}{\partial z}\, \vec{e}_z\,.$$

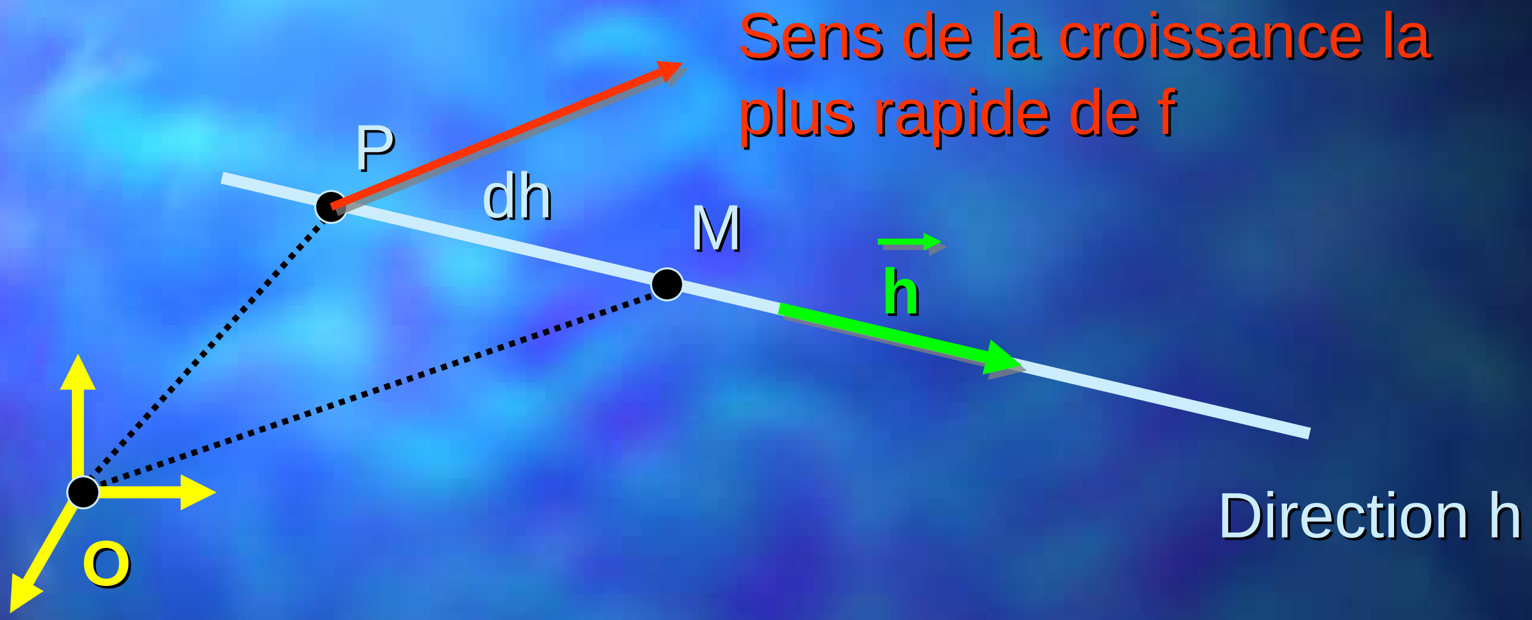
Sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial f(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\, \vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\, \vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}\, \vec{e}_\varphi\,.$$

Direction et sens du gradient

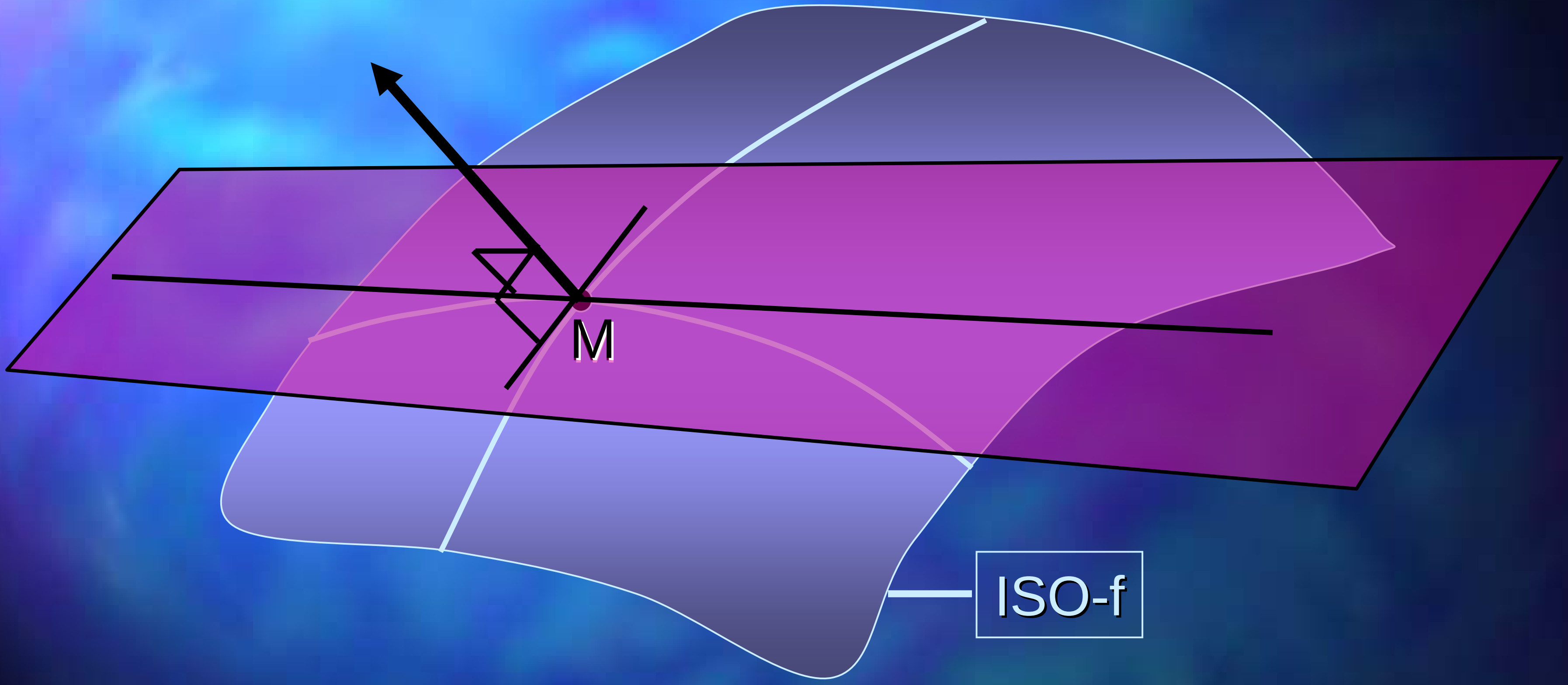


Direction et sens du gradient



Le gradient d'une fonction est dirigé suivant la direction de variation la plus RAPIDE de f, dans le sens des valeurs croissantes de f.

Direction et sens du gradient

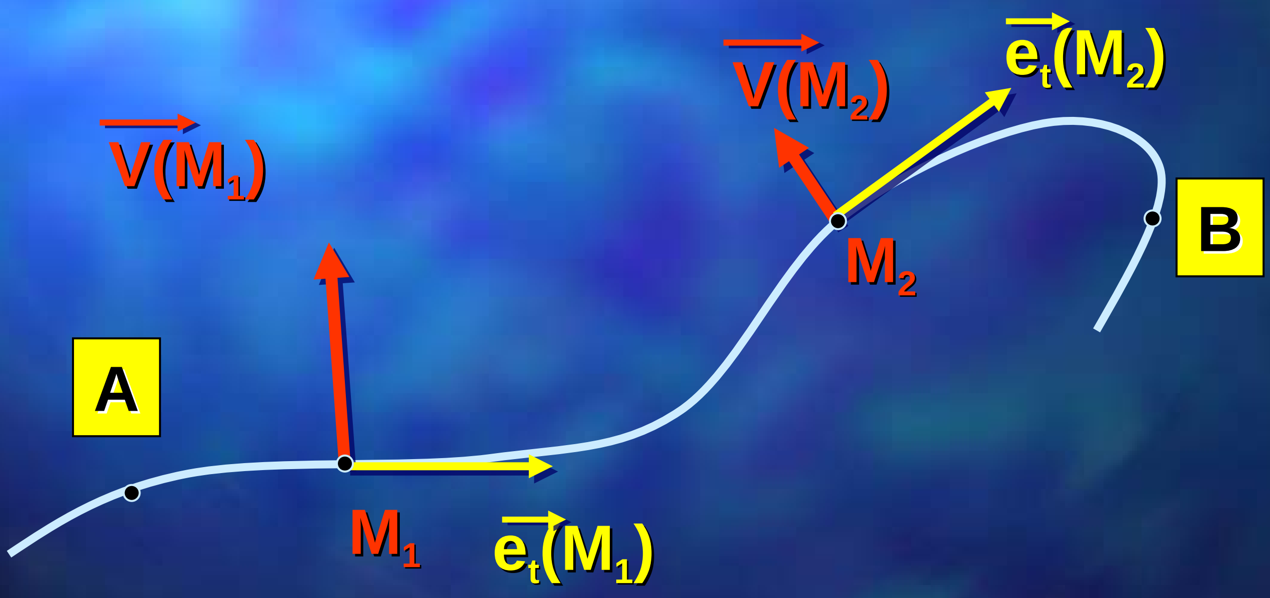


Le gradient d'une fonction est NORMAL aux iso-f

Circulation d'un champ de gradient

- Un champ scalaire f(M)

$$\longrightarrow \boxed{\vec{V}(M) = \overrightarrow{grad}\, f(M)}$$



Circulation d'un champ de gradient

$$Circulation = \int \overrightarrow{grad}\, f(M) \cdot d\overrightarrow{OM}$$

$$Circulation = \int df$$

$$Circulation = f(B) - f(A)$$

<u>Le résultat ne dépend pas du chemin suivi</u>

Circulation d'un champ de gradient

f(B) - f(A) = chute de potentiel

<u>Le résultat ne dépend pas du chemin suivi</u>

Caractéristique des <u>champs conservatifs</u>

A retenir

Il y a en fait <u>équivalence</u> entre :

- Le champ $\vec{V}$ est conservatif.
- Le champ $\vec{V}$ dérive d'un potentiel.
- Il existe un champ f tel que $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}\, f$.
- $\vec{V}(M).d(\overrightarrow{OM})$ est une différentielle exacte (qui vaut df).
- La circulation de $\vec{V}$ d'un point A à un point B ne dépend que de A et de B.
- La circulation de $\vec{V}$ sur TOUT contour fermé vaut 0.

Divergence et rotationnel

Divergence et rotationnel

- Un champ vectoriel

$$\vec{V}(M)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(M) \qquad\qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{V}(M)$$

DIVERGENCE **ROTATIONNEL**

La divergence

Expressions de la divergence :

cartésiennes

$$\mathrm{div}\,\vec{f} = \frac{\partial f_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial f_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial f_z(x,y,z)}{\partial z}\ .$$

cylindriques

$$\mathrm{div}\,\vec{f} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\rho\, f_\rho(\rho,\varphi,z)\Big) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f_\varphi(\rho,\varphi,z)}{\partial \varphi} + \frac{\partial f_z(\rho,\varphi,z)}{\partial z}\ .$$

sphériques

$$\mathrm{div}\,\vec{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2 f_r(r,\theta,\varphi)\Big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\sin\theta\, f_\theta(r,\theta,\varphi)\Big) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f_\varphi(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}\ .$$

Relation utile :

$$div\left(\lambda\vec{V}\right) = \lambda div(\vec{V}) + \overrightarrow{grad}(\lambda)\cdot\vec{V}$$

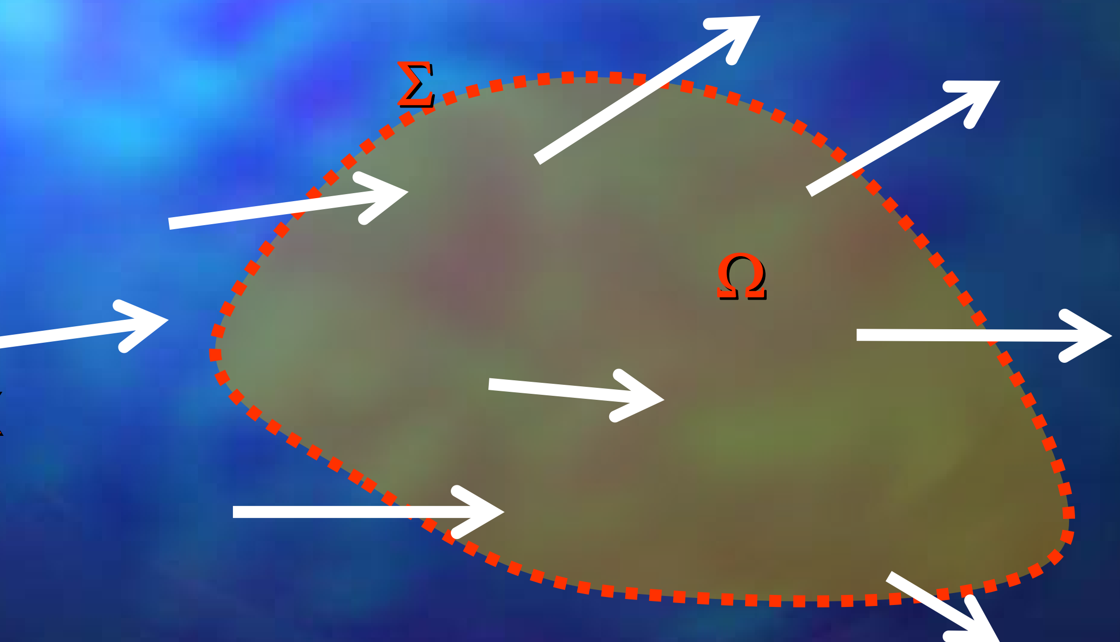
Interprétation physique ?

<u>Formule de la divergence (Ostrogradsky) :</u>

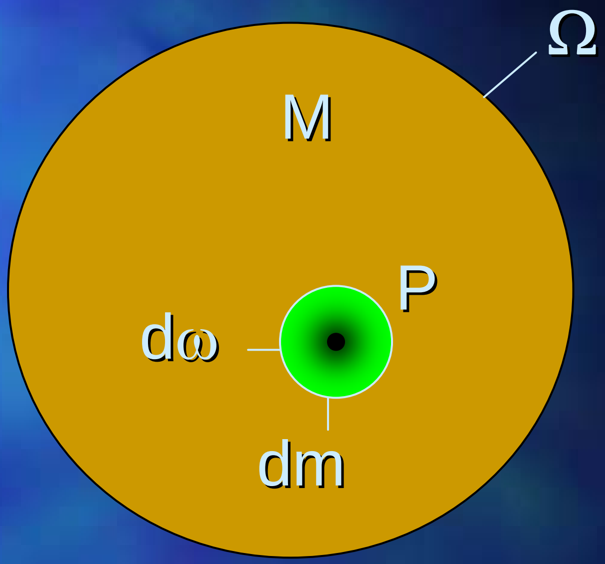
$$\boxed{\oint\!\!\!\!\iint_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{\sigma}} = \iiint_{\Omega} div\,(\vec{V}\,)\,d\omega$$

UN FLUX

Φ



Interprétation physique ?



Masse volumique :

$$\rho(\Omega) = \frac{M}{\Omega}$$

$$\rho(P) = \frac{dm}{d\omega}$$

Généralisation à tout Ψ: → Grandeur extensive

$$\rho_\Psi(P) = \lim_{\Omega \to 0 \ en\ P} \frac{\Psi(\Omega)}{\Omega}$$

$$\Psi(\Omega) = \iiint_\Omega \rho_\Psi(P)\, d\omega$$

→ **Ressemble à l'intégrale de Green-Ostrogradsky**

Interprétation physique !

Densité d'un scalaire

$$\rho_\Psi(M) = \lim_{\Omega \to 0 \ en\ M} \frac{\Psi(\Omega)}{\Omega}$$

Divergence

$$\boldsymbol{div\left(\vec{V}\right)_M = \lim_{\Omega \to 0\ en\ M} \frac{\Phi(\Sigma)}{\Omega}}$$

(Cette limite n'existe pas toujours)

La divergence d'un champ vectoriel est au flux vectoriel ce que la densité est à un champ scalaire

Conséquence sur les équations de bilan

Équations locales $\cancel{\Psi} \longrightarrow \rho_{\Psi}$

$\cancel{\Phi} \longrightarrow$? Densité de flux

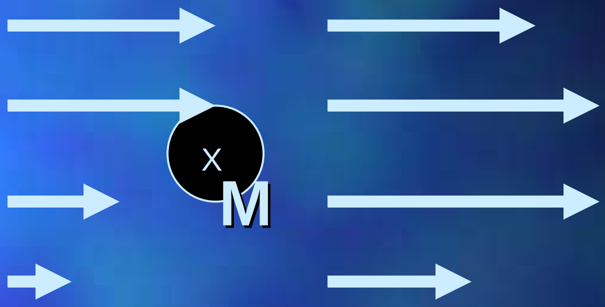
DIVERGENCE $\longleftarrow$

La divergence intervient chaque fois qu'on exprime la conservation d'une grandeur dans un milieu continu (cf. la suite du cours).

Illustrations possibles (EN LOCAL)

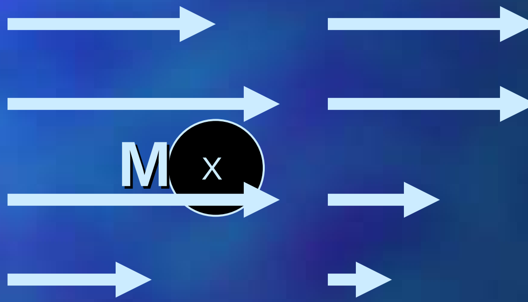
$$div(\vec{A}) > 0$$

source

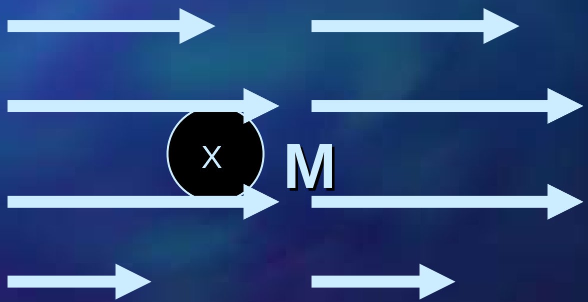


$$div(\vec{A}) < 0$$

puits



$$div(\vec{A}) = 0$$



Le rotationnel

Expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_z}{\partial y} - \dfrac{\partial V_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial V_x}{\partial z} - \dfrac{\partial V_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V_y}{\partial x} - \dfrac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

cartésiennes

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z\,.$$

cylindriques

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial f_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial f_\rho}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial \rho}\right)\vec{e}_\varphi + \left(\left(\frac{1}{\rho} + \frac{\partial}{\partial \rho}\right) f_\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial f_\rho}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_z\,.$$

sphériques

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{f} \;&=\; \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta f_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial f_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r f_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \\ &\left(\left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right) f_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial f_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi\,.\end{aligned}$$

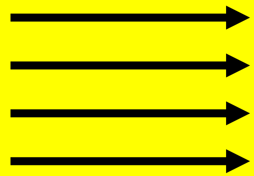
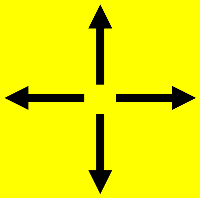
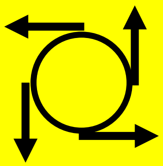
Relations utiles

$$\overrightarrow{rot}\left(\lambda\vec{V}\right) = \lambda\overrightarrow{rot}(\vec{V}) + \overrightarrow{grad}(\lambda)\wedge\vec{V}$$

Formule du rotationnel (Stokes)

$$\Phi = \oint_{\Gamma} \vec{V}\cdot d\overrightarrow{OM} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{rot}(\vec{V})\,d\sigma$$

Justification de la terminologie

Champ $\vec{V}$	$div(\vec{V})$	$\overrightarrow{rot}(\vec{V})$
Uniforme 	**0**	$\vec{0}$
Divergent $V_\rho = Cste$ 	$\frac{V_\rho}{\rho} > 0$	$\vec{0}$
Tournant $V\varphi = Cste$ 	**0**	$\frac{V\varphi}{\rho}\vec{e}_z$

Champs à divergence nulle

Champs à divergence nulle

Si $\vec{V}$ est tel que $div(\vec{V})=0$ (en tout point),

dans ce cas, il existe un champ $\vec{\Psi}$ tel que :

$$\boxed{\vec{V}=\overrightarrow{rot}(\vec{\Psi})}$$

Potentiel vecteur

$div(\overrightarrow{rot})=0$

Champs 2D à divergence nulle (1/4)

Si V est un champ 2D, on peut montrer que : $\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Psi) \wedge \vec{k}$

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{Donc } \vec{V} \perp \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Psi) \\ \\ \textbf{Et comme } \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Psi) \perp \textbf{iso-}\Psi \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\vec{V} \ /\!/ \ \textbf{iso-}\Psi}$$

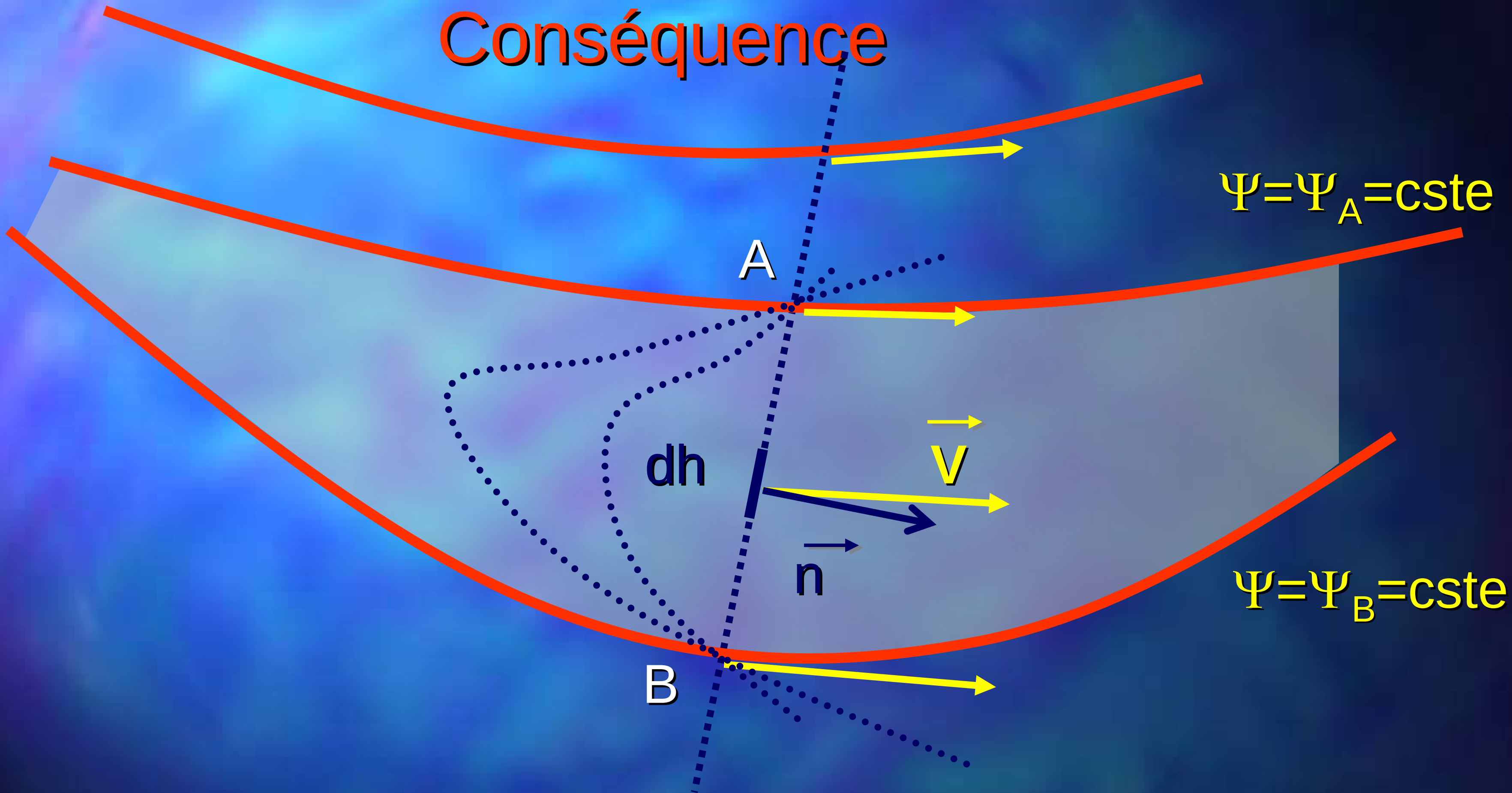
Les lignes de courant/champ d'un champ à divergence nulle sont données par :

$$\Psi = \mathrm{cste}$$

Ψ est appelée fonction de courant

Champs 2D à divergence nulle (2/4)

Conséquence



$$\Phi = \int_A^B \vec{V} \cdot \vec{n}\, dh = \Psi_B - \Psi_A = \text{cste entre 2 LdC}$$

Champs 2D à divergence nulle (3/4)

Les champs à divergence nulle sont dits :

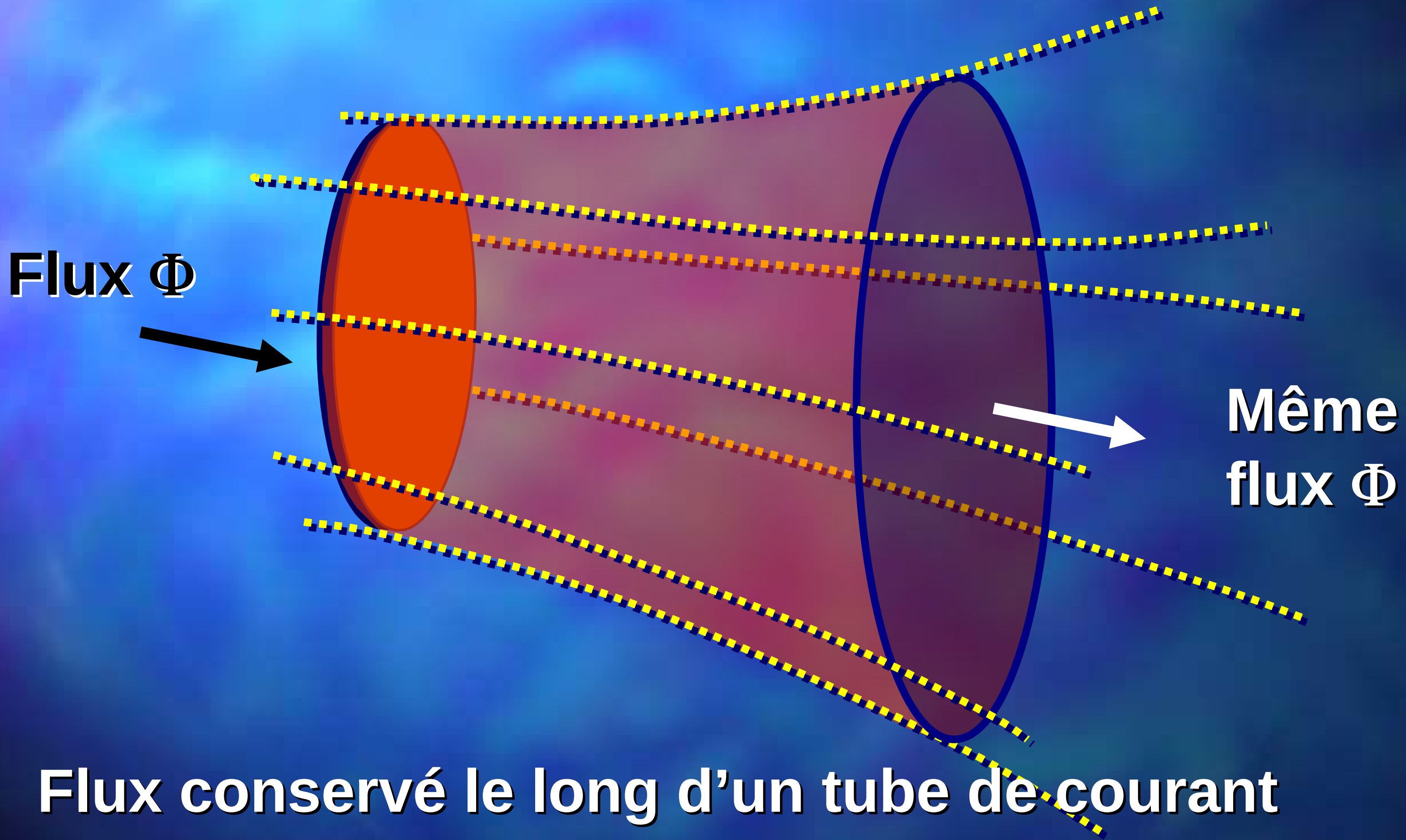
Champs à flux conservatif

Champs 2D à divergence nulle (4/4)

2D plan Cartésien	$U = \partial \Psi / \partial y$	$V = -\partial \Psi / \partial x$
2D plan Cylindrique	$U_\rho = \frac{1}{\rho} \partial \Psi / \partial \varphi$	$U_\varphi = -\partial \Psi / \partial \rho$
2D axisym. Cylindrique	$U_\rho = \frac{1}{\rho} \partial \Psi / \partial z$	$U_z = -\frac{1}{\rho} \partial \Psi / \partial \rho$

Exercice : vérifier que ces champs sont bien à divergence nulle

Extension :
champs 3D à divergence nulle



Flux conservé le long d'un tube de courant

Flux net au travers de l'enveloppe d'un tube de courant = 0

Champs à divergence nulle

On montre en outre :

$$\vec{\Omega} = \overrightarrow{rot}\left(\vec{V}\right) = -\Delta\Psi\vec{k}$$

→Pour un champ irrotationnel et à divergence nulle, la fonction de courant s'obtient en résolvant **L'EQUATION de LAPLACE : $\Delta\Psi=0$**

Champs à rotationnel nul

ou, autrement dit

Champs irrotationnels

Champs à rotationnel nul (1/2)

Si $\vec{V}$ est tel que $\overrightarrow{rot}(\vec{V})=\vec{0}$ (en tout point),

dans ce cas, il existe un champ Φ tel que :

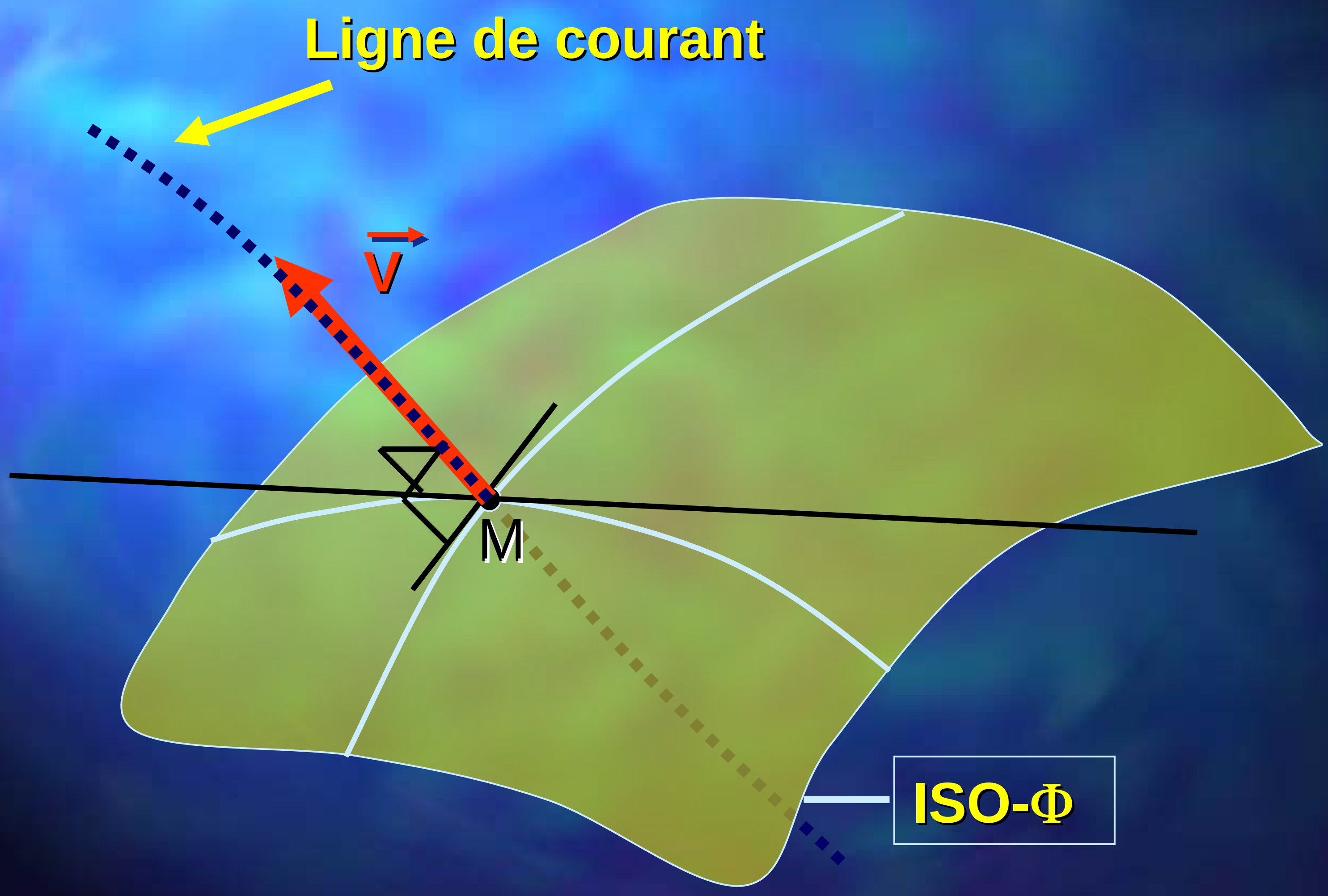
$$\vec{V}=\overrightarrow{grad}(\Phi)$$

Fonction "potentiel"

Les champs à rotationnel nul sont donc :
des champs conservatifs

$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad})=\vec{0}$

Champs à rotationnel nul (2/2)



Champs 2D, permanents tels que $\mathrm{div}(\vec{V})=0$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{V})=0$

$\vec{V}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Phi)$

$\vec{V}=\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{\Psi})$