CEB : Champ - Equation de Bilan

Jacob Lamblin

Bureau H110, lamblin@subatech.in2p3.fr

Plan :

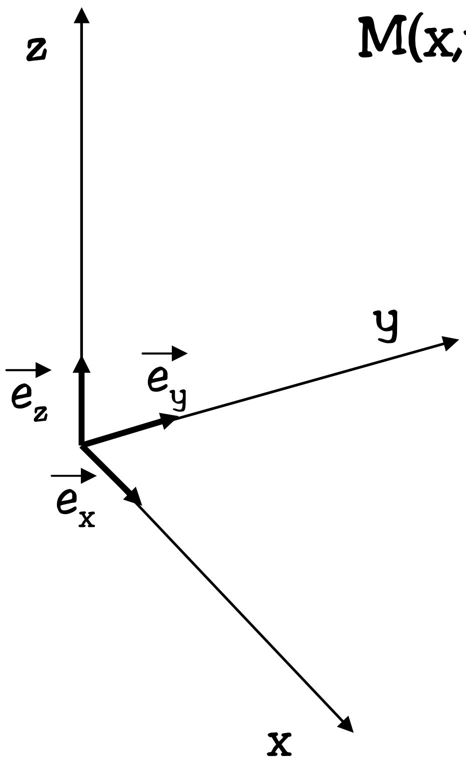
1) Rappel : systèmes de coordonnées et vecteurs

2) Champs

3) Gradient, Divergence, Rotationnel

4) Equation de Bilan

Coordonnées cartésiennes



M(x,y,z) dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ indépendante de M

Vecteur position $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$

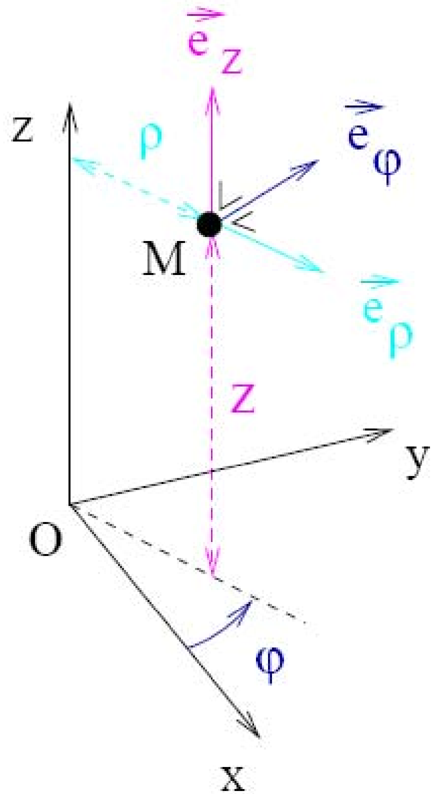
$$\overrightarrow{dOM} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$$

Volume infinitésimal $dV = dx\,dy\,dz$

Surfaces infinitésimales

si z est constant : $dS = dx\,dy$
si x est constant : $dS = dy\,dz$
si y est constant : $dS = dx\,dz$

Coordonnées cylindriques



ρ, φ, z dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ dépendante de M

$\rho \in [0,+\infty[$, $\varphi \in [0,2\pi[$, $z \in]-\infty,+\infty[$

Vecteur position $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e\rho} + z \vec{e}_z$

$$\overrightarrow{dOM} = d\rho\, \vec{e}_\rho + \rho\, d\theta\, \vec{e}_\theta + dz\, \vec{e}_z$$

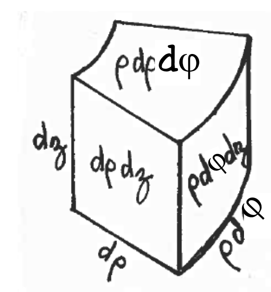
Volume infinitésimal $dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$

Surfaces infinitésimales

si ρ est constant : $dS = \rho\, d\varphi\, dz$

si φ est constant : $dS = d\rho\, dz$

si z est constant : $dS = \rho\, d\rho\, d\varphi$



Changements de repère

$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y$

$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y$

$\vec{e}_z = \vec{e}_Z$

$x = \rho\cos\varphi$

$y = \rho\sin\varphi$

$Z = z$

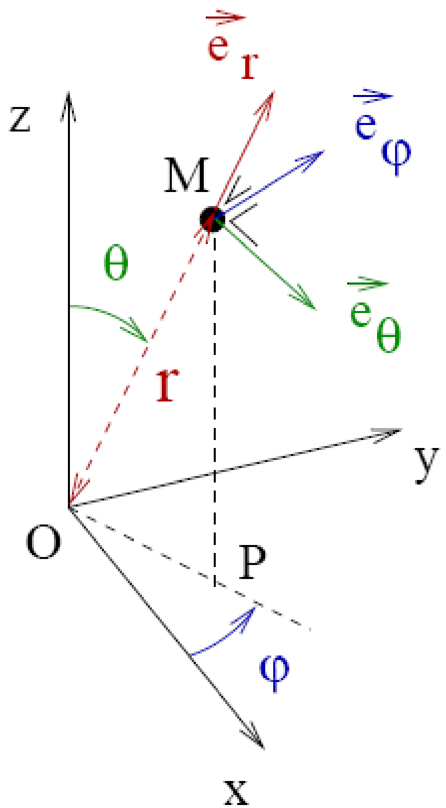
$\rho = \sqrt{(x^2+y^2)}$

$\varphi = \mathrm{Arctan}(y/x)$ si $x>0$

$\varphi = \mathrm{Arctan}(y/x) + \pi$ si $x<0$

$z = Z$

Coordonnées sphériques



r, θ, φ dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ dépendante de M

$r \in [0,+\infty[\ ,\ \theta \in [0,\pi]\ ,\ \varphi \in [0,2\pi[$

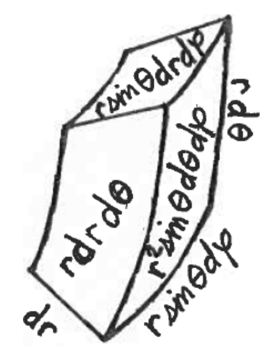
Vecteur position $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$

$$\overrightarrow{dOM} = dr\,\vec{e}_r + r d\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

Volume infinitésimal $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$

Surfaces infinitésimales

si r est constant : $dS = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$
si θ est constant : $dS = r \sin\theta\, dr\, d\varphi$
si φ est constant : $dS = r\, dr\, d\theta$



Changements de repère

$\vec{e}_r = \cos\varphi \sin\theta\, \vec{e}_x + \sin\varphi \sin\theta\, \vec{e}_y + \cos\theta\, \vec{e}_z$
$\vec{e}_\theta = \cos\varphi \cos\theta\, \vec{e}_x + \sin\varphi \cos\theta\, \vec{e}_y - \sin\theta\, \vec{e}_z$
$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y$

$x = r\cos\varphi \sin\theta$
$y = r\sin\varphi \sin\theta$
$z = r\cos\theta$

Produit scalaire et produit vectoriel

Produit scalaire :

$$\vec{u}_1 . \vec{u}_2 = \left|\vec{u}_1\right| \left|\vec{u}_2\right| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \qquad \vec{u} . \vec{u} = \left|\vec{u}\right|^2 \qquad \vec{u}_1 . \vec{u}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaire est nul.

Produit vectoriel :

$$\vec{w} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \left|\vec{u}_1\right| \left|\vec{u}_2\right| \sin(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\, \vec{n}$$ où $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{n})$ est direct et $\left|\vec{n}\right| = 1$

Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul.

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} \qquad \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = -\vec{u}_2 \wedge \vec{u}_1$$

$$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_{1,x} & u_{1,y} & u_{1,z} \\ u_{2,x} & u_{2,y} & u_{2,z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{1,y} & u_{1,z} \\ u_{2,y} & u_{2,z} \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_{1,x} & u_{1,z} \\ u_{2,x} & u_{2,z} \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_{1,x} & u_{1,y} \\ u_{2,x} & u_{2,y} \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \left(u_{1,y} u_{2,z} - u_{1,z} u_{2,y}\right) \vec{i} + \left(u_{1,z} u_{2,x} - u_{1,x} u_{2,z}\right) \vec{j} + \left(u_{1,x} u_{2,y} - u_{2,x} u_{1,y}\right) \vec{k}$$